

01. MỞ ĐẦU VỀ PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Thầy Đặng Việt Hùng

I. VÉC TƠ – TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG**Bài 1.** Cho các điểm $A(2; 3)$; $B(-1; 4)$, $C(1; 1)$. Tìm tọa độ điểm D để**a)** $ABCD$ là hình bình hành.**b)** $ACDB$ là hình bình hành.**Bài 2.** Cho các điểm $A(-1; 1)$; $B(1; 3)$, $C(-2; 0)$.**a)** Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.**b)** Chứng minh rằng ba điểm O, A, B không thẳng hàng.**Bài 3.** Cho các điểm $A(4; 6)$; $B(1; 4)$, $C\left(7; \frac{3}{2}\right)$, $D(-2; 2)$.Chứng minh rằng ba điểm A, B, C không thẳng hàng; ba điểm A, B, D thẳng hàng.**Bài 4.** Cho các điểm $A(1; 3)$; $B(3; -2)$, $C(2; 2)$. Tìm tọa độ $G; H; I$ của tam giác ABC .Đ/s: $I(2; 1)$.**Bài 5.** Cho các điểm $A(0; 5)$; $B(-2; -1)$, $C(2; 1)$. Tìm tọa độ $G; H; I$ của tam giác ABC .Đ/s: $I(-1; 2)$.**Bài 6.** Cho các điểm $A(2; -3)$; $B(3; 4)$, $C(0; 2)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.Đ/s: $M(0; -17)$.**Bài 7.** Cho các điểm $A(2; 3)$; $B(3; 4)$ Tìm điểm M thuộc Ox để ba điểm $A; B; M$ thẳng hàng.**Bài 8.** Cho các điểm $A(1; -1)$; $B(4; 0)$, $C(6; 4)$. Tìm điểm D trên Oy để $ABCD$ là hình thang.**Bài 9.** Cho điểm $A(1; 1)$ Tìm điểm B trên đường thẳng $y = 3$; điểm C trên Ox để tam giác ABC đều.**Bài 10.** Tìm điểm A trên Ox , điểm B trên Oy sao cho A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x - 2y + 3 = 0$.Đ/s: $A(2; 0), B(0; 4)$.**Bài 11.** Trong mặt phẳng Oxy cho 3 điểm $A(2; 5), B(1; 1), C(3; 3)$.**a)** Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.**b)** Tìm tọa độ điểm E sao cho $ABCE$ là hình bình hành. Tìm tọa độ tâm hình bình hành đó.Đ/s: **a)** $D(-3; -3)$. **b)** $E(4; 7), I\left(\frac{5}{2}; 4\right)$.**Bài 12.** Cho tam giác ABC có $A(-1; 1), B(5; -3)$, đỉnh C thuộc Oy và trọng tâm G thuộc Ox . Tìm tọa độ đỉnh C .Đ/s: $G\left(\frac{4}{3}; 0\right), C(0; 2)$.**Bài 13.** Cho tam giác ABC biết $A(2; -2), B(0; 4), C(-2; 2)$. Tìm tọa độ trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .Đ/s: Tam giác vuông tại C nên $H \equiv C; I(1; 1)$.**Bài 14.** Cho $A(0; 2), B(-\sqrt{3}; -1)$. Tìm tọa độ trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB .

02. BÀI TOÁN TÌM ĐIỂM – GÓC – KHOẢNG CÁCH

Thầy Đặng Việt Hùng

1) Bài toán tìm điểm thuộc đường thẳng**Ví dụ 1.** Cho đường thẳng $d: 2x + y + 3 = 0$. Tìm điểm M trên d sao cho

a) $MA = 2\sqrt{5}$ với $A(3; -1)$

b) $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{\sqrt{19}}$, với $A(0; 1)$ và $B(3; -1)$.

c) $x_M^2 + 2y_M^2 = 3$.

Đ/s: a) $M(1; -5)$

b) $M(-2; 1)$

c) $M(-1; -1)$

Ví dụ 2. Cho đường thẳng $d: x - 3y + 1 = 0$. tìm điểm M trên d sao cho

a) $d(M; \Delta) = 3\sqrt{2}$ với $\Delta: x + y + 3 = 0$.

b) $d(M; \Delta_1) = d(M; \Delta_2)$, với $\Delta_1: x + 2y - 1 = 0$; $\Delta_2: 2x + y + 4 = 0$;

Đ/s: a) $M(2; 1)$ và $M(-7; -2)$

b) $M(-1; 0)$ và $M(-7; -2)$

Ví dụ 3. Cho 2 điểm $A(-1; 0)$, $B(2; 3)$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - t \end{cases}$. Tìm tọa độ điểm C trên d sao cho tam giác ABC vuông tại A .**Ví dụ 4.** Cho 2 điểm $M(-1; 4)$; $N(5; -4)$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$. Tìm tọa độ điểm A trên d sao cho tam giác AMN vuông tại A .**Ví dụ 5.** Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$, $B(3; -1)$, $C(-1; -3)$. Tìm tọa độ điểm A trên d sao cho A, B, C thẳng hàng.**Ví dụ 6.** Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$ và điểm $M(3; 1)$. Tìm điểm B trên Δ sao cho MB ngắn nhất.

Đ/s: $B\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC với $A(-1; 0)$, $B(2; 3)$, $C(3; -6)$ và đường thẳng $d: x - 2y - 3 = 0$.Tìm điểm M trên d sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

Đ/s: $M\left(\frac{19}{15}; -\frac{13}{15}\right)$.

2) Một số bài toán về góc; khoảng cách và diện tích**Ví dụ 1. (Khối B - 2003).** Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC vuông cân tại A . Biết $M(1; -1)$ là trung điểm cạnh BC và $G\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ là trọng tâm tam giác ABC . Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C .

Đ/s: $B(4; 0)$; $C(-2; -2)$

Ví dụ 2. (Khối B - 2007). Trong mặt phẳng Oxy cho $A(2; 2)$ và các đường thẳng $\begin{cases} d_1: x + y - 2 = 0 \\ d_2: x + y - 8 = 0 \end{cases}$. Tìm điểm B, C lần lượt thuộc $d_1; d_2$ sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .

D/s: $\begin{cases} B(-1; 3), C(3; 5) \\ B(3; -1), C(5; 3) \end{cases}$

Ví dụ 3. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm I có diện tích $S = 2$. Biết $A(1; 0)$, $B(2; 0)$, tâm I thuộc phân giác $y = x$. Xác định tọa độ C, D .

D/s: $C(3; 4), D(2; 4)$ hoặc $C(-5; -4), D(-6; -4)$

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy có $A(2; -1)$, $B(1; -2)$, trọng tâm G thuộc đường thẳng $d: x + y - 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm C biết diện tích tam giác ABC bằng $\frac{3}{2}$.

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC , với $A(2; -1)$, $B(1; -2)$, trọng tâm G của tam giác nằm trên đường thẳng $d: x + y - 2 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C biết diện tích tam giác ABC bằng $\frac{27}{2}$.

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại C , biết $A(-2; 0)$, $B(2; 0)$ và khoảng cách từ trọng tâm G đến trục hoành bằng $\frac{1}{3}$. Tìm tọa độ đỉnh C .

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho 2 đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \end{cases}; d': \begin{cases} x = 2 + u \\ y = 4 + 5u \end{cases}$, $A(2; 0)$, $B(1; -4)$. Tìm trên d điểm G , trên d' điểm C sao cho G là trọng tâm tam giác ABC .

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng: $d_1: 2x - 3y + 1 = 0$, $d_2: 4x + y - 5 = 0$. A là giao điểm của d_1 và d_2 . Tìm điểm B thuộc d_1 , điểm C thuộc d_2 sao cho tam giác ABC có trọng tâm $G(3; 5)$.

Bài 3. Cho 2 điểm $A(3; 2)$, $B(3; -6)$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -\frac{5}{2} + t \end{cases}$. Tìm tọa độ điểm M trên d sao cho tam giác ABM cân tại M .

Bài 4. Cho hai điểm $A(2; 1)$, $B(-1; -3)$ và hai đường thẳng $d_1: x + y + 3 = 0$; $d_2: x - 5y - 16 = 0$. Tìm tọa độ các điểm C, D lần lượt thuộc d_1 và d_2 sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Bài 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x + y - 3 = 0$ và 2 điểm $A(1; 1)$, $B(-3; 4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng AB bằng 1.

Bài 6. Cho 4 điểm $A(1; 0)$, $B(-2; 4)$, $C(-1; 4)$, $D(3; 5)$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng $3x - y - 5 = 0$ sao cho hai tam giác MAB, MCD có diện tích bằng nhau

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC , với $A(1; 1)$, $B(-2; 5)$, đỉnh C nằm trên đường thẳng $x = 4$, và trọng tâm G của tam giác nằm trên đường thẳng $2x - 3y + 6 = 0$. Tính diện tích tam giác ABC .

Bài 8. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC . Phương trình đường thẳng chứa cạnh AB là $y = 2x$. Phương trình đường thẳng chứa cạnh AC là $x + 4y - 9 = 0$; trọng tâm $G\left(\frac{8}{3}; \frac{7}{3}\right)$. Tính diện tích tam giác ABC .

Bài 9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1; 0)$, $B(3; -1)$ và đường thẳng $d: x - 2y - 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm C thuộc d sao cho diện tích tam giác ABC bằng 6.

Bài 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho điểm $C(2; -5)$ và đường thẳng $d: 3x - 4y + 4 = 0$. Tìm trên d hai điểm A và B đối xứng nhau qua $I\left(2; \frac{5}{2}\right)$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng 15.

03. BÀI TOÁN GIẢI TAM GIÁC – P2

Thầy Đặng Việt Hùng

III. XỬ LÝ ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG TAM GIÁC

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đường cao AH , trung tuyến CM và phân giác trong BD . Biết $H(-4;1)$, $M\left(\frac{17}{5};12\right)$ và BD có phương trình $x+y-5=0$. Tìm tọa độ đỉnh A của tam giác ABC .

Lời giải :

Đường thẳng Δ qua H và vuông góc với BD có PT: $x-y+5=0$. $\Delta \cap BD = I \Rightarrow I(0;5)$

Giả sử $\Delta \cap AB = H'$. $\Delta BHH'$ cân tại $B \Rightarrow I$ là trung điểm của $HH' \Rightarrow H'(4;9)$.

Phương trình AB : $5x+y-29=0$. $B = AB \cap BD \Rightarrow B(6;-1) \Rightarrow A\left(\frac{4}{5};25\right)$

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $C(4;3)$. Biết phương trình đường phân giác trong (AD) : $x+2y-5=0$, đường trung tuyến (AM) : $4x+13y-10=0$. Tìm tọa độ đỉnh B .

Lời giải :

Ta có $A = AD \cap AM \Rightarrow A(9;-2)$. Gọi C' là điểm đối xứng của C qua $AD \Rightarrow C' \in AB$.

Ta tìm được: $C'(2;-1)$. Suy ra phương trình (AB) : $\frac{x-9}{2-9} = \frac{y+2}{-1+2} \Leftrightarrow x+7y+5=0$.

Viết phương trình đường thẳng $Cx \parallel AB \Rightarrow (Cx)$: $x+7y-25=0$

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trung điểm cạnh AB là $M(-1;2)$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là $I(2;-1)$. Đường cao của tam giác kẻ từ A có phương trình $2x+y+1=0$. Tìm tọa độ đỉnh C .

Lời giải :

PT đường thẳng AB qua M và nhận $\overrightarrow{MI} = (3;-3)$ làm VTPT: (AB) : $x-y+3=0$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x+y+1=0 \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$.

$M(-1;2)$ là trung điểm của AB nên $B\left(-\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Đường thẳng BC qua B và nhận $\vec{n} = (2;1)$ làm VTCP nên có PT: $\begin{cases} x = -\frac{2}{3} + 2t \\ y = \frac{7}{3} + t \end{cases}$

Giả sử $C\left(-\frac{2}{3} + 2t; \frac{7}{3} + t\right) \in (BC)$.

Ta có: $IB = IC \Leftrightarrow \left(2t - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(t + \frac{10}{3}\right)^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ (loại vì } C \equiv B) \\ t = \frac{4}{5} \end{cases}$

Vậy: $C\left(\frac{14}{15}; \frac{47}{15}\right)$.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho ΔABC biết: $B(2;-1)$, đường cao qua A có phương trình d_1 : $3x-4y+27=0$, phân giác trong góc C có phương trình d_2 : $x+2y-5=0$. Tìm tọa độ đỉnh A .

Lời giải :

Phương trình BC: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} \Rightarrow$ Toạ độ điểm $C(-1;3)$

+) Gọi B' là điểm đối xứng của B qua d_2 , I là giao điểm của BB' và d_2 .

$\Rightarrow$ phương trình BB' : $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} \Leftrightarrow 2x - y - 5 = 0$

+) Toạ độ điểm I là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow I(3;1)$

+) Vì I là trung điểm BB' nên: $\begin{cases} x_{B'} = 2x_I - x_B = 4 \\ y_{B'} = 2y_I - y_B = 3 \end{cases} \Rightarrow B'(4;3)$

+) Đường AC qua C và B' nên có phương trình: $y - 3 = 0$.

+) Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y - 3 = 0 \\ 3x - 4y + 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(-5;3)$

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có $A(2; -1)$ và các đường phân giác trong góc B và C lần lượt có phương trình $x - 2y + 1 = 0$; $x + y + 3 = 0$.

Lập phương trình đường thẳng BC.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có $A(-1; 3)$, đường cao BH nằm trên đường thẳng $y = x$, phân giác trong góc C nằm trên đường thẳng $x + 3y + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC.

Ví dụ 7. (Trích đề thi ĐH khối D - 2011)

Cho tam giác ABC có $B(-4; 1)$, trọng tâm $G(1; 1)$ và đường phân giác trong góc A là $x - y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A và C.

Ví dụ 8. (Trích đề thi ĐH khối B - 2010)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A có $C(-4; 1)$ phân giác trong góc A có phương trình $x + y - 5 = 0$. Viết phương trình BC biết diện tích tam giác là 24 và đỉnh A có hoành độ dương.

Đ/s: $B(4; 7)$, BC: $3x - 4y - 16 = 0$

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC có $M(1; -2)$ là trung điểm AB, trục Ox là phân giác góc A, đỉnh B, C thuộc đường thẳng đi qua $N(-3; 0)$ và $P(0; 2)$. Tìm tọa độ ba đỉnh A, B, C và diện tích tam giác ABC.

Ví dụ 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phân giác trong AD và đường cao CH lần lượt có phương trình $x + y - 2 = 0$, $x - 2y + 5 = 0$. Điểm $M(3;0)$ thuộc đoạn AC thỏa mãn $AB = 2AM$. Xác định tọa độ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC.

Lời giải:

Gọi E là điểm đối xứng của M qua AD $\Rightarrow E(2; -1)$.

Đường thẳng AB qua E và vuông góc với CH $\Rightarrow (AB): 2x + y - 3 = 0$.

Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;1) \Rightarrow$ PT (AM): $x + 2y - 3 = 0$

Do $AB = 2AM$ nên E là trung điểm của AB $\Rightarrow B(3; -3)$.

Toạ độ điểm C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-1;2)$

Vậy: $A(1;1)$, $B(3;-3)$, $C(-1;2)$.

Ví dụ 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, tìm tọa độ các đỉnh của một tam giác vuông cân, biết đỉnh $C(3; -1)$ và phương trình của cạnh huyền là $d: 3x - y + 2 = 0$.

Lời giải:

Toạ độ điểm C không thỏa mãn phương trình cạnh huyền nên ΔABC vuông cân tại C. Gọi I là trung điểm

của AB . Phương trình đường thẳng CI : $x + 3y = 0$.

$$I = CI \cap AB \Rightarrow I\left(-\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right) \Rightarrow AI = BI = CI = \sqrt{\frac{72}{5}}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} A, B \in d \\ AI = BI = \sqrt{\frac{72}{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 2 = 0 \\ \left(x + \frac{3}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{72}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5}; y = \frac{19}{5} \\ x = -\frac{9}{5}; y = -\frac{17}{5} \end{cases}$$

Vậy tọa độ 2 đỉnh cần tìm là: $\left(\frac{3}{5}; \frac{19}{5}\right), \left(-\frac{9}{5}; -\frac{17}{5}\right)$.

Ví dụ 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho $\triangle ABC$, với đỉnh $A(1; -3)$ phương trình đường phân giác trong BD : $x + y - 2 = 0$ và phương trình đường trung tuyến CE : $x + 8y - 7 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C .

Lời giải:

Gọi E là trung điểm của AB . Giả sử $B(b; 2 - b) \in BD \Rightarrow E\left(\frac{b+1}{2}; -\frac{1+b}{2}\right) \in CE \Rightarrow b = -3$

$\Rightarrow B(-3; 5)$. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua $BD \Rightarrow A' \in BC$. Tìm được $A'(5; 1)$

$\Rightarrow$ Phương trình BC : $x + 2y - 7 = 0$; $C = CE \cap BC$: $\begin{cases} x + 8y - 7 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(7; 0)$.

Ví dụ 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(1; -2)$, đường cao CH : $x - y + 1 = 0$, phân giác trong BN : $2x + y + 5 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C và tính diện tích tam giác ABC .

Lời giải:

Do $AB \perp CH$ nên phương trình AB : $x + y + 1 = 0$.

+) $B = AB \cap BN \Rightarrow$ Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x + y + 5 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow B(-4; 3)$.

+) Lấy A' đối xứng với A qua BN thì $A' \in BC$.

Phương trình đường thẳng (d) qua A và vuông góc với BN là (d) : $x - 2y - 5 = 0$.

Gọi $I = (d) \cap BN$. Giải hệ: $\begin{cases} 2x + y + 5 = 0 \\ x - 2y - 5 = 0 \end{cases}$. Suy ra: $I(-1; 3) \Rightarrow A'(-3; -4)$

+) Phương trình BC : $7x + y + 25 = 0$. Giải hệ: $\begin{cases} BC: 7x + y + 25 = 0 \\ CH: x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{13}{4}; -\frac{9}{4}\right)$.

+) $BC = \sqrt{\left(-4 + \frac{13}{4}\right)^2 + \left(3 + \frac{9}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{450}}{4}$, $d(A; BC) = \frac{|7 \cdot 1 + 1(-2) + 25|}{\sqrt{7^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2}$.

Suy ra: $S_{ABC} = \frac{1}{2} d(A; BC) \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{450}}{4} = \frac{45}{4}$.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho tam giác ABC có phân giác trong AD : $x - y = 0$, đường cao CH : $2x + y + 3 = 0$, cạnh AC qua $M(0; -1)$,

$AB = 2AM$. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC .

Bài 2. Cho tam giác ABC có đường cao kẻ từ B và phân giác góc A là $x - 2y - 2 = 0$, $x - y - 1 = 0$, điểm $M(0; 2)$ thuộc AB và $AB = 2AC$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác

Đ/s: $B(0; 1), C(3; 1)$

Bài 3: Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đường phân giác từ A , trung tuyến từ B , đường cao từ C có phương trình lần lượt là $x + y - 3 = 0$; $x - y + 1 = 0$; $2x + y + 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác

Đ/s: $A\left(\frac{12}{17}; \frac{39}{17}\right), B\left(\frac{32}{17}; \frac{49}{17}\right), C\left(-\frac{8}{17}; \frac{16}{17}\right)$.

Bài 4: Tam giác ABC có $A(7; 9)$, trung tuyến $CM: 3x + y - 15 = 0$, đường phân giác trong $BD: x + 7y - 20 = 0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC .

Bài 5: Xác định tọa độ đỉnh B của tam giác ABC biết $C(4; 3)$ và đường phân giác trong, trung tuyến kẻ từ A lần lượt có phương trình $x + 2y - 5 = 0$ và $4x + 13y - 10 = 0$.

Bài 6: Tam giác ABC có $B(-4; 3)$, đường cao kẻ từ A và phân giác trong qua C có phương trình,

$$\begin{cases} h_A: x + 3y - 15 = 0 \\ \ell_C: x - y + 3 = 0 \end{cases}. \text{Viết phương trình các cạnh của tam giác } ABC.$$

04. KỸ THUẬT XỬ LÝ HÌNH VUÔNG

Thầy Đặng Việt Hùng

Ví dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$ có $A(-2; 0)$ và tâm $I(0; 0)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông.

D/s: $B(0; 2), C(-1; 0), D(0; -2)$

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ có A thuộc $d_1: x + y + 2 = 0$, các đỉnh C, D thuộc đường $d_2: x - y - 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông biết diện tích hình vuông bằng 8.

D/s: $A(-2; 0), B(0; 2), C(2; 0), D(0; -2)$

Ví dụ 3. Cho hình vuông $ABCD$ biết A thuộc $d_1: x - 3y = 0$, C thuộc $d_2: 2x + y - 5 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông $ABCD$ biết rằng B, D thuộc đường thẳng $d_3: x - y = 0$.

D/s: $A(3; 1), B(3; 3), C(1; 3), D(1; 1)$ hoặc $A(3; 1), B(1; 1), C(1; 3), D(3; 3)$

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $d_1: x + 2y - 3 = 0$ và $d_2: x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông $ABCD$ biết rằng đỉnh A thuộc d_1 , đỉnh C thuộc d_2 và các đỉnh B, D thuộc đường thẳng $y = 2$.

D/s: $A(1; 1), B(2; 2), C(1; 3), D(0; 2)$ hoặc $A(1; 1), B(0; 2), C(1; 3), D(2; 2)$

Ví dụ 5. (Trích đề ĐH khối A năm 2005)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $d_1: x - y = 0$ và $d_2: 2x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông $ABCD$ biết rằng đỉnh A thuộc d_1 , đỉnh C thuộc d_2 và các đỉnh B, D thuộc trục hoành.

D/s: $A(1; 1), B(0; 0), C(1; -1), D(2; 0)$ hoặc $A(1; 1), B(2; 0), C(1; -1), D(0; 0)$.

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $I(1; -1)$ là tâm của một hình vuông, một trong các cạnh của nó có phương trình $x - 2y + 12 = 0$. Viết phương trình các cạnh còn lại của hình vuông.

D/s: $A(4; 8), B(-8; 2), C(-2; -10)$ $AD: 2x + y - 16 = 0$; $BC: 2x + y + 14 = 0$; $CD: x - 2y - 18 = 0$

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình vuông có đỉnh $(-4; 8)$ và một đường chéo có phương trình $7x - y + 8 = 0$. Viết phương trình các cạnh hình vuông.

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình vuông có tâm $I(1; 1)$ và phương trình một cạnh là $x - y + 2 = 0$. Viết phương trình các cạnh của hình vuông đã cho hình vuông.

D/s: $A(-1; 1), B(1; 3), C(3; 1), D(1; -1)$

Ví dụ 9. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm I , biết $A(1; 3)$ trọng tâm các tam giác ADC và IDC lần lượt là $G\left(\frac{1}{3}; 5\right), G'\left(\frac{1}{3}; \frac{17}{3}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

D/s: $B(3; 5), C(1; 7), D(-1; 5)$

Ví dụ 10. (Trích đề ĐH khối A năm 2012)

Cho hình vuông $ABCD$ có $M\left(\frac{11}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của BC , N là điểm trên CD sao cho $CN = 2DN$. Biết phương trình cạnh AN là $2x - y - 3 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh A của hình vuông.

D/s: $A(4;5), A(1;-1)$ **BÀI TẬP LUYỆN TẬP:**

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho ba điểm $I(1;1), J(-2;2), K(2;-2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD sao cho I là tâm hình vuông, J thuộc cạnh AB và K thuộc cạnh CD.

D/s: $A(1;5), B(-3;1), C(5;1), D(1;-3)$

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có đỉnh $A(-3;5)$, tâm I thuộc đường thẳng $d: y = -x + 5$ và diện tích bằng 25. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD, biết rằng tâm I có hoành độ dương.

Bài 3. Cho hình vuông ABCD có tâm I, biết $A(-2; 2)$ trọng tâm các tam giác ABC và IBC lần lượt là $G\left(\frac{4}{3}; 2\right), G'\left(\frac{7}{3}; \frac{5}{3}\right)$. Tìm tọa độ I và C.

D/s: $I(1; 1), C(4; 0)$

Bài 4. Cho hình vuông ABCD có M là trung điểm BC, phương trình DM: $x - y - 2 = 0$, $C(3; -3)$. Đỉnh A thuộc đường thẳng d: $3x + y - 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông.

D/s: $A(-1;5), B(-3;-1); D(5; 3)$

Bài 5. Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm $M(0;2), N(5;-3), P(-2;-2), Q(2;-4)$ lần lượt nằm trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông ABCD. Tính diện tích của hình vuông đó.

Bài 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD biết $M(2; 1), N(4; -2); P(2; 0), Q(1; 2)$ lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, AD. Hãy lập phương trình các cạnh của hình vuông.

D/s: $AB: -x + y + 1 = 0, BC: -x - y + 2 = 0, CD: -x + y + 2 = 0, AD: -x - y + 3 = 0.$

Bài 7. Cho hình vuông ABCD có $A(1; 1)$, điểm M thuộc cạnh CD sao cho $DM = 2CM$. Biết phương trình cạnh BM là $x + 5y - 18 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông biết C thuộc d: $2x - y + 3 = 0$.

D/s: $B(3; 3), C(1; 5); D(-1; 3)$

Bài 8. Cho hình vuông ABCD có $A(1; 2)$, điểm M $(-2; 3)$ là trung điểm cạnh CD. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông.

D/s: $B(3; 4), C(-1; 4); D(-3; 2)$

Bài 9. Cho hình vuông ABCD có $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của BC, N là trung điểm của CD, biết phương trình cạnh BN là $3x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

D/s: $A(0;0), B(1;1), C(2;0), D(1;-1)$

Bài 10. Cho hình vuông ABCD có $I\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$ là tâm, các đỉnh A, B lần lượt thuộc các đường thẳng $d_1: x + y - 3 = 0; d_2: x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

D/s: $A(2;1), B(1;3), C(3;4), D(4;2)$ và một cặp nữa nhé!

05. KỸ THUẬT XỬ LÝ HÌNH CHỮ NHẬT

Thầy Đặng Việt Hùng

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $I(2; 2)$ là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Điểm $M(-3; 1)$ thuộc đường thẳng AB và trung điểm N của cạnh CD thuộc đường thẳng $d: x + 2y - 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AB .

Đ/s: $(AB): x - y + 4 = 0; 3x - 5y + 14 = 0$.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $I\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ là tâm của hình chữ nhật, $AB = 2AD$ và AD có phương trình $x + y - 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Đ/s: $A(1; 1), B(3; 3), C(2; 4), D(0; 2)$

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2AD$. Các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA với $M\left(-\frac{4}{3}; 1\right), N(0; 3), P\left(4; -\frac{1}{3}\right), Q(6; 2)$. Viết phương trình các cạnh của hình chữ nhật.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB: x - y + 1 = 0, AC: x - 3y + 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết $E(0; -3)$ thuộc BD .

Đ/s: $A(0; 1), B(2; 3), C(3; 2), D(1; 0)$

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2AD$. Điểm $M(0; 2)$ là trung điểm của CD , N là trung điểm của CD . Biết $DN: 5x - 3y = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Đ/s: $A(-1; 1), B(1; 3), C(2; 2), D(0; 0)$

Ví dụ 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có giao điểm của hai đường chéo là $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, cạnh AB có phương trình là $x - 2y + 2 = 0, AB = 2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật, biết đỉnh A có hoành độ âm.

Đ/s: $A(-2; 0), B(2; 2), C(3; 0), D(-1; -2)$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP:**Bài 1. (Trích đề thi ĐH khối A năm 2009)**

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $I(6; 2)$ là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Điểm $M(1; 5)$ thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $\Delta: x + y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AB .

Đ/s: $(AB): y - 5 = 0; x - 4y + 19 = 0$.

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 12, tâm I là giao của hai đường thẳng $d: x - y - 3 = 0$ và $d': x + y - 6 = 0$. Trung điểm một cạnh là giao điểm của d với tia Ox . Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Đ/s: Tọa độ các đỉnh là $(2; 1), (5; 4), (7; 2), (4; -1)$

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có phương trình đường thẳng $AB: x - 2y - 1 = 0$, phương trình đường thẳng $BD: x - 7y + 14 = 0$, đường thẳng AC đi qua $M(2; 1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Đ/s: $A(1; 0), C(6; 5), D(0; 2), B(7; 3)$

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Tìm tọa độ tâm I của hình chữ nhật $ABCD$ biết phương trình các đường thẳng $AD: x + y + 2 = 0$; $AC: x - 3y + 6 = 0$ và đường thẳng BD đi qua điểm $E(-6; -12)$

Đ/s: $I\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB: x - 3y + 5 = 0$, $BD: x - y - 1 = 0$ và đường chéo AC đi qua điểm $M(-9; 2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$.

Đ/s: $A(-2; 1), B(4; 3), C(5; 0), D(-1; -2)$

Bài 6. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có phương trình đường thẳng $(AB): x - y + 1 = 0$ và phương trình đường thẳng $(BD): 2x + y - 1 = 0$; đường thẳng (AC) đi qua $M(-1; 1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Bài 7. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I(1; -1)$ phương trình $AD: x + y + 2 = 0$; $AD = 2AB$. Tìm tọa độ các đỉnh biết đỉnh A có hoành độ âm.

Đ/s: $A(-2; 0), B(0; 2), C(4; -2)$

Bài 8. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $D(-1; 3)$, đường thẳng chứa phân giác trong góc A là $x - y + 6 = 0$. Tìm tọa độ B biết $|x_A| = |y_A|$ và $dt(ABCD) = 18$.

Đ/s: $B(-3; -12)$

06. KỸ THUẬT XỬ LÝ HÌNH THANG

Thầy Đặng Việt Hùng

Ví dụ 1. Cho hình thang vuông $ABCD$ tại A, B với $AD \parallel BC$, $AD = 2BC = 2AB$. Biết $M(-1; -2)$ là trung điểm của AC và $G\left(-\frac{2}{3}; -2\right)$ là trọng tâm tam giác ABC . Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang.

Đ/s: $A(-1; -1)$, $B(0; -2)$, $C(-1; -3)$ và một cặp nữa nhé!

Ví dụ 2. Cho hình thang vuông $ABCD$ tại A, B với AD là đáy lớn, $AB: x + y - 2 = 0$, $AC: x = 1$. Biết rằng góc giữa CD và BC bằng 45° và diện tích hình thang bằng 3. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang.

Đ/s: $A(1; 1)$, $B(0; 2)$, $C(1; 3)$, $D(3; 3)$

Ví dụ 3. Cho hình thang cân $ABCD$ có $CD = 2AB$ và diện tích hình thang bằng 9. Biết phương trình các đường chéo AC và BD lần lượt là $x - y + 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang.

Đ/s: $A(2; 3)$, $B(2; 1)$, $C(-1; 0)$, $D(-1; 4)$

Ví dụ 4. Cho hình thang vuông $ABCD$ tại A, D với DC là đáy lớn, $AD: x + y + 1 = 0$. Điểm $M\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của cạnh BC . Tìm tọa độ điểm A biết $AB = AD = \frac{BC}{\sqrt{5}}$.

Đ/s: $A(-1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(1; 4)$, $D(-2; 1)$

Ví dụ 5. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và $AB < CD$, $A(0; 2)$, $D(-2; -2)$. Giao điểm I của hai đường chéo nằm trên đường thẳng $d: x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ B, C biết $\widehat{AID} = 45^\circ$.

Đ/s: $t = 2; t = 4 \Rightarrow \begin{cases} B(2 + \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}), C(2 + 4\sqrt{2}; 2 + 4\sqrt{2}) \\ B(4 + 3\sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}), C(4 + 4\sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}) \end{cases}$

Ví dụ 6. Cho hình thang $ABCD$ (với $AB \parallel CD$) có $AD = AB$, $DC = 2AB$ và $\widehat{BAD} = 90^\circ$. Biết $M(1; -1)$ là trung điểm của BD và trọng tâm tam giác ABD là $G\left(\frac{2}{3}; 0\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang.

Đ/s: $B(4; 0)$, $D(-2; -2)$; $C(6; -6)$ hoặc $B(-2; -2)$, $D(4; 0)$, $C(0; -8)$

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D có đáy lớn là CD , đường thẳng AD có phương trình $3x - y = 0$, đường thẳng BD có phương trình $x - 2y = 0$, góc tạo bởi hai đường thẳng BC và AB bằng 45° . Viết phương trình đường thẳng BC biết diện tích hình thang bằng 24 và điểm B có hoành độ dương.

Ví dụ 8. Cho 3 điểm $A(-2; 0)$, $B(0; 4)$, $C(4; 0)$. Tìm D sao cho $ABCD$ là hình thang cân có một đáy là AB tính diện tích hình thang đó.

07. KỸ THUẬT XỬ LÝ HÌNH THOI, HÌNH BÌNH HÀNH

Thầy Đặng Việt Hùng

Ví dụ 1. Cho hình thoi $ABCD$ có $B(-2; 3)$, các đỉnh A, C thuộc $d: x - y + 1 = 0$. Tìm các đỉnh còn lại của hình thoi biết diện tích hình thoi bằng 8.

Đ/s: $A(-1; 0), C(1; 2), D(2; -1)$

Ví dụ 2. Cho hình thoi $ABCD$ có $AB: 3x + y - 8 = 0$; $CD: 3x + y = 0$; $M\left(1; \frac{7}{3}\right) \in BC, N(-3; 1) \in AD$. Tìm các đỉnh của hình thoi đã cho.

Đ/s: $A(3; -1), B(2; 2), C(-1; 3), D(0; 0)$

Ví dụ 3. Cho hình thoi $ABCD$ có $A(1; 0)$, $BD: x - y + 1 = 0$. Tìm các đỉnh còn lại biết $BD = 4\sqrt{2}$.

Đ/s: $B(2; 3), C(-1; -2), D(-2; -1)$

Ví dụ 4. Cho hình thoi $ABCD$ có $A(0; -1)$, $C(2; 1)$, tâm I thuộc $d: x + y - 1 = 0$. Tìm các đỉnh C, D .

Đ/s: $C(0; 2), D(-2; 1); C(4; -1), D(2; -3)$

Ví dụ 5. Cho đường thẳng $d: 3x - 4y + 10 = 0$ và điểm $A(2; 1)$. Tìm các đỉnh hình thoi $ABCD$ biết B, D thuộc (d) và $\widehat{BAD} = 120^\circ$

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I(2; 1)$ và $AC = 2BD$. Điểm $M\left(0; \frac{1}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB , điểm $N(0; 7)$ thuộc đường thẳng CD . Tìm tọa độ đỉnh B biết B có hoành độ dương.

Đ/s: $B(1; -1)$.

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình thoi $ABCD$ có cạnh AB, CD lần lượt nằm trên 2 đường thẳng $d_1: x - 2y + 5 = 0; d_2: x - 2y + 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AD và BC biết $M(-3; 3)$ thuộc đường thẳng AD và $N(-1; 4)$ thuộc đường thẳng BC .

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I(3; 3)$ và $AC = 2BD$. Điểm $M\left(2; \frac{4}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB , điểm $N\left(3; \frac{13}{3}\right)$ thuộc đường thẳng CD . Viết phương trình đường chéo BD biết đỉnh B có hoành độ nhỏ hơn 3.

Đ/s: $B\left(\frac{14}{5}; \frac{8}{5}\right), BD: 7x - y - 18 = 0$.

Ví dụ 9. Cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-3; -1); B(2; 2)$ giao điểm 2 đường chéo thuộc đường thẳng $x - 6y - 3 = 0$, diện tích hình bình hành bằng 26. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành.

Đ/s: $C(-15; -3), D(-20; -6)$ hoặc $C(9; 1), D(4; -2)$

Ví dụ 10. Cho hình bình hành $ABCD$ có $A(2; 0); B(3; 2)$, I thuộc $d: y = x$. Tìm C, D biết $S_{ABCD} = 4$.

Đ/s: $C(3; 4), D(2; 4); C(-5; -4), D(-6; -4)$

Ví dụ 11. Cho hình bình hành $ABCD$ có $A(0; 1); B(3; 4)$ nằm trên $(P): y = x^2 - 2x + 1$. Tâm I nằm trên cung AB của (P) . Tìm C, D sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất?

Đ/s: $C\left(3; -\frac{1}{2}\right), D\left(0; -\frac{7}{2}\right)$

Ví dụ 12. Cho hình bình hành $ABCD$ có $B(1; 5)$, đường cao $AH: x + 2y - 2 = 0$, phân giác trong góc ACB là $x - y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành.

Đ/s: Thầy chưa giải!

06. ĐƯỜNG TRÒN – P1

Thầy Đặng Việt Hùng

I. LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN**Ví dụ 1.** Lập phương trình đường tròn biết

- a) Tâm I thuộc Ox , đi qua $A(3; -1)$ và $B(1; 1)$.
 b) Tâm I thuộc Oy và đi qua $A(1; 3)$, $B(5; 1)$.
 c) Tâm I thuộc $d: 2x + 2y - 3 = 0$ và đi qua $A(3; 0)$, $B(1; -2)$.

Đ/s: a) $(x-2)^2 + y^2 = 2$ b) $x^2 + (y+4)^2 = 50$ c) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2$

Ví dụ 2. Lập phương trình đường tròn biết

- a) Tâm I thuộc Ox , đi qua $A(3; 1)$ và $B(0; -2)$.
 b) Tâm I thuộc Oy và đi qua $A(-1; 1)$, $B(-3; -1)$.
 c) Tâm I thuộc $d: x + y - 1 = 0$ và đi qua $A(0; -4)$, $B(2; 0)$.

Đ/s: a) $(x-1)^2 + y^2 = 5$ b) $x^2 + (y+2)^2 = 10$ c) $(x-5)^2 + (y+4)^2 = 25$

Ví dụ 4. Lập phương trình đường tròn biết

- a) Tâm I thuộc $d: 2x + y + 4 = 0$ và đi qua $A(0; 0)$, $B(2; -1)$
 b) Tâm I thuộc $d: x + y + 1 = 0$ và đi qua $A(1; 5)$, $B(2; -2)$

Đ/s: a) $I(-1; -2), R = \sqrt{5}$ b) $I(-2; 1), R = 5$

Ví dụ 5. Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm

- a) $A(1; 6)$, $B(4; 0)$, $C(3; 0)$.
 b) $A(0; 0)$, $B(2; 6)$, $C(4; 2)$.

Đ/s: a) $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y-4)^2 = \frac{65}{4}$ b) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$

Ví dụ 6. Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm

- a) $A(1; 3)$, $B(-1; -1)$, $C(2; 0)$.
 b) $A(1; 0)$, $B(-3; -2)$, $C(-5; 2)$.

Đ/s: a) $x^2 + (y-1)^2 = 5$ b) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP:**Bài 1.** Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C_m): (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$ và đường thẳng $d: x + 2y - 1 = 0$.Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng d .**Bài 2.** Cho đường cong $(C_m): x^2 + y^2 + 4(m-1)x + 2my - 3m + 1 = 0$ Tìm m để

- a) (C_m) là phương trình đường tròn?
 b) (C_m) là đường tròn có bán kính $R = \sqrt{13}$.

Đ/s: b) $m = 2$

Bài 3. Cho đường cong $(C_m): x^2 + y^2 + mx + 2(m-1)y + 1 - 3m = 0$ Tìm m để

- a) (C_m) là phương trình đường tròn?

b) (C_m) là đường tròn có bán kính $R = \frac{\sqrt{33}}{2}$.

Đ/s: b) $m = -3$

Bài 4. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$. Lập phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng $(d): x + 2 = 0$.

Bài 5. Lập phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC biết phương trình 3 cạnh của tam giác là $x + 2y - 7 = 0; x - 2y - 3 = 0; 2x - y + 1 = 0$

Bài 6. Lập phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB với $A(-8; 0), B(0; 6)$

Đ/s: $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

Bài 7. Lập phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC với $A(-2; 3), B\left(\frac{1}{4}; 0\right), C(2; 0)$

Đ/s: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Bài 8. Cho các đường thẳng $d_1: 4x - 3y - 12 = 0; d_2: 4x + 3y - 12 = 0$. Tìm tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác có 3 cạnh là $d_1; d_2$ và trục Oy .

Đ/s: $J\left(\frac{4}{3}; 0\right), r = \frac{4}{3}$

06. ĐƯỜNG TRÒN – P2

Thầy Đặng Việt Hùng

II. ĐƯỜNG THẲNG TIẾP XÚC VỚI ĐƯỜNG TRÒN**Ví dụ 1.** Lập phương trình đường tròn biết

- a) Tâm I thuộc $\Delta: x + y + 5 = 0$ và tiếp xúc với $d: x + 2y + 1 = 0$ tại $A(3; -2)$.
- b) Tâm I thuộc $\Delta: x + 2y + 3 = 0$ đồng thời tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1: x + 3y + 1 = 0$; $d_2: x - 3y + 2 = 0$.

Đ/s: a) $I(-1; -6), R = 4\sqrt{2}$ **Ví dụ 2.** Lập phương trình đường tròn biết

- a) Tâm I thuộc $\Delta: x + y + 1 = 0$ và tiếp xúc với $d: x + 3y + 4 = 0$ tại $M(-1; -1)$.
- b) Tâm I thuộc $\Delta: x - y + 2 = 0$ và tiếp xúc với $d: 3x - y + 1 = 0$ và qua $A(2; 3)$.

Đ/s: a) $I\left(-\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}\right), R = \frac{\sqrt{10}}{2}$ b) $I\left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right), R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **Ví dụ 3.** Lập phương trình đường tròn biết

- a) Tiếp xúc với Ox tại $A(2; 0)$ và đi qua $B(1; 1)$.
- b) Tiếp xúc với Ox tại $A(-1; 0)$ và đi qua $B(1; 2)$.

Đ/s: a) $I(2; 1), R = 1$ b) $I(-1; 2), R = 2$ **Ví dụ 4.** Lập phương trình đường tròn biết

- a) Tiếp xúc với Ox tại $A(3; 0)$ và tiếp xúc với $d: x + 2 = 0$.
- b) Tiếp xúc với Ox đồng thời đi qua $A(0; 8), B(-1; 1)$.

Đ/s: a) $I(3; 5), R = 5$ b) $I(3; 4), R = 5$ **Ví dụ 5.** Lập phương trình đường tròn biết

- a) Tiếp xúc với Oy tại $A(0; -2)$ và đi qua $B(1; -1)$.
- b) Tiếp xúc với $Ox; Oy$ và đi qua $A(2; 1)$.
- c) Tiếp xúc với $Ox; Oy$ và đi qua $A(4; -2)$.

Đ/s: a) $I(1; -2), R = 1$ b) $I(1; 1), R = 1$ c) $I(2; -2), R = 2$ **BÀI TẬP LUYỆN TẬP:****Bài 1.** Lập phương trình đường tròn biết

- a) Tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1: 7x - y - 5 = 0$; $d_2: x + y + 13 = 0$ và một tiếp điểm là $M(1; 2)$.
- b) Tiếp xúc với ba đường thẳng $d_1: 3x + 4y - 35 = 0$; $d_2: 3x - 4y - 35 = 0$; $d_3: x - 1 = 0$.

Đ/s: a) $\left[\begin{array}{l} I(29; -2), R = 20\sqrt{2} \\ I(-6; 3), R = 5\sqrt{2} \end{array} \right.$ b) $\left[\begin{array}{l} I\left(\frac{35}{3}; \pm\frac{40}{3}\right), R = \frac{32}{3} \\ I(-25; 0), R = 16; I(5; 0), R = 4 \end{array} \right.$

Bài 2. Lập phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB biết

a) $A(8; 0); B(0; 6)$

b) $A(3; 0); B(0; -4)$

Đ/s: a) $I(2; 2), R = 2$

Bài 3. Cho tam giác ABC có phương trình ba cạnh là $4x - 3y - 65 = 0; 7x - 24y + 55 = 0; 3x + 4y - 5 = 0$

Lập phương trình đường tròn nội tiếp của tam giác

Đ/s: Tam giác ABC vuông ở A ; $S = 100$; $p = 30 \Rightarrow r = 5$.

Bài 4. Lập phương trình đường tròn nội tiếp tam giác có phương trình ba cạnh là

a) $15x - 8y - 65 = 0; 3x - 4y - 10 = 0; 5x + 12y - 30 = 0$

b) $3x + 4y - 6 = 0; 4x + 3y - 1 = 0; y = 0$

Bài 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$ và hai đường thẳng

$\Delta_1: x - y = 0, \Delta_2: x - 7y = 0$. Xác định tọa độ tâm K và tính bán kính của đường tròn (C_1) ; biết đường tròn (C_1) tiếp xúc với các đường thẳng Δ_1, Δ_2 và tâm $K \in (C)$.

Bài 6. Hãy lập phương trình đường tròn (C) biết rằng

a) đường kính AB với $A(-1; 1), B(5; 3)$

b) qua 3 điểm $A(1; 3), B(5; 6)$ và $C(7; 0)$

c) tâm $I(-4; 2)$ và tiếp xúc $d: 3x + 4y - 16 = 0$

d) tiếp xúc các trục tọa độ và đi qua $A(2; 4)$

e) tiếp xúc với Ox tại $A(-1; 0)$ và đi qua $B(3; 2)$

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(2; 0)$ và $B(6; 4)$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm B bằng 5.

06. ĐƯỜNG TRÒN – P3

Thầy Đặng Việt Hùng

III. ĐƯỜNG THẲNG CẮT ĐƯỜNG TRÒN

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$. Viết phương trình đường thẳng đi qua $M\left(3; \frac{1}{3}\right)$ và cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{10}$.

Đ/s: $x - 3y - 2 = 0$

Ví dụ 2. Cho đường tròn $(C): (x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$ và $\Delta: 3x - 4y + 10 = 0$. Lập pt đường thẳng d vuông góc với Δ và cắt (C) tại A, B sao cho $AB = 6$.

Đ/s: $c = 27; c = -13$.

Ví dụ 3. Cho đường tròn $(C): (x+1)^2 + y^2 = 10$. Viết phương trình đường thẳng đi qua $M(3; 3)$ và cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $MB = 3MA$.

Đ/s: $2x - y - 3 = 0$

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $d: 3x + y - 2 = 0$ và cắt đường tròn theo một dây cung có độ dài bằng 6.

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , viết phương trình đường tròn (C) qua 3 điểm $A(2; 3), B(4; 5), C(4; 1)$. Chứng tỏ điểm $K(5; 2)$ thuộc miền trong của đường tròn (C) . Viết phương trình đường thẳng d qua điểm K sao cho d cắt (C) theo dây cung AB nhận K làm trung điểm.

Ví dụ 6. Cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$. Viết phương trình đường thẳng qua $A(2; 1)$, cắt (C) tại E, F sao cho A là trung điểm của EF .

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm $M(2; 4)$.

- Chứng minh rằng điểm M nằm trong đường tròn.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M , cắt đường tròn tại hai điểm A và B sao cho M là trung điểm của AB .
- Viết phương trình đường tròn đối xứng với đường tròn đã cho qua đường thẳng AB .

Đ/s: b) $x - y + 2 = 0$

Ví dụ 8. Cho đường tròn $(C): x^2 + (y+1)^2 = 9$. Viết phương trình đường thẳng đi qua $M(1; 3)$ và cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho AB ngắn nhất và nhỏ nhất.

Ví dụ 9. Cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 40$ có tâm I và đường thẳng $\Delta: x + (m-1)y + 2m + 3 = 0$.

Tìm m để Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB bằng $6\sqrt{11}$.

Đ/s: $m = 0; m = 2; m = 1 \pm \frac{\sqrt{77}}{11}$.

Ví dụ 10. (Khối A – 2009)

Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$ và đường thẳng $\Delta: x + my - 2m + 3 = 0$.

Tìm m để đường Δ cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất.

Đ/s: $m = 0; m = \frac{8}{15}$.

Ví dụ 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: y - 1 = 0; d_2: \sqrt{3}x - y + 1 = 0$. Lập phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với d_2 tại A , cắt d_1 tại B, C sao cho tam giác ABC vuông tại C và diện tích tam giác ABC bằng $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Đ/s: $R = \sqrt{3}; A(1; \sqrt{3} + 1)$.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP:

Bài 1. Cho đường tròn và đường thẳng $\begin{cases} (C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9 \\ \Delta: (m+1)x + my - 1 = 0 \end{cases}$

- a) Chứng minh rằng Δ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B .
b) Tìm m để độ dài đoạn AB luôn đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất?

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(6; 2)$ và đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

Lập phương trình đường thẳng d qua M và cắt (C) tại 2 điểm $A; B$ sao cho $MA^2 + MB^2 = 50$.

Hướng dẫn: Dễ thấy M nằm ngoài đường tròn, đặt $AH = x$, với H là trung điểm của AB .

Tính toán một hồi với Pitago suy ra $IH = AH = x = \frac{R}{\sqrt{2}}$

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(2; 3)$ và đường tròn $(C): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$

Lập phương trình đường thẳng d qua M và cắt (C) tại 2 điểm $A; B$ sao cho $MA^2 + MB^2 = 18$.

Đ/s: $2x - y - 1 = 0; x + 2y - 8 = 0$.

Bài 4. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm $M(2; 4)$.

Viết phương trình đường thẳng đi qua M cắt đường tròn tại 2 điểm A và B , sao cho M là trung điểm của AB .

Bài 5. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2my + m^2 - 24 = 0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta: mx + 4y = 0$. Tìm m biết đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn diện tích tam giác IAB bằng 12.

Đ/s: $m = \pm 3; m = \pm \frac{16}{3}$.

Bài 6. Cho đường tròn $(C): x^2 + (y-3)^2 = 9$ và đường thẳng $\Delta: x + (m-1)y + 2 - m = 0$.

Tìm m để đường Δ cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất.

Đ/s: $m = 2$.

Bài 7. Cho đường tròn $(C): x^2 + (y+2)^2 = 25$ và đường thẳng $d: x + 5y - 7 = 0$.

Gọi A, B là các giao điểm của đường thẳng và đường tròn, tính diện tích tam giác IAB .

$$\text{Đ/s: } A(-3; 2), B(2; 1); S_{IAB} = \frac{17}{2}.$$

Bài 8. Cho đường tròn $(C): (x+1)^2 + y^2 = 13$ và đường thẳng $d: 5x - y - 8 = 0$.

Gọi A, B là các giao điểm của đường thẳng và đường tròn, tính diện tích tam giác IAB .

$$\text{Đ/s: } A(1; -3), B(2; 2); S_{IAB} = \frac{13}{2}.$$

Bài 9. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ và điểm $A(1; 0)$. Viết phương trình đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho tam giác AMN vuông cân tại A .

$$\text{Đ/s: } y = 1 \text{ và } y = -3.$$

Bài 10. Cho đường tròn $(C): x^2 + (y+1)^2 = 9$ và điểm $A(1; -2)$. Viết phương trình đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho tam giác AMN có trọng tâm là I , với I là tâm của đường tròn.

Bài 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: \sqrt{3}x + y = 0$; $d_2: \sqrt{3}x - y = 0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A , cắt d_2 tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông tại B . Viết phương trình của (T) , biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

Bài 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $B\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F . Cho $D(3; 1)$ và đường thẳng EF có phương trình $y = 3$. Tìm tọa độ đỉnh A , biết A có tung độ dương.

06. ĐƯỜNG TRÒN – P4

Thầy Đặng Việt Hùng

IV. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Ví dụ 1. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn

$$\text{a) } \begin{cases} (C_1): x^2 + (y+1)^2 = 4 \\ (C_2): x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (C_1): (x+1)^2 + y^2 = 9 \\ (C_2): (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4 \end{cases}$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng hai đường tròn $\begin{cases} (C_1): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ (C_2): (x-4)^2 + (y+2)^2 = 9 \end{cases}$ tiếp xúc ngoài với nhau.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$ và điểm $A(1; 0); B(0; 2)$. Đường tròn đường kính AB cắt đường tròn (C) tại hai điểm P, Q. Lập phương trình đường thẳng PQ.

Ví dụ 4. Cho hai đường tròn $\begin{cases} (C_1): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \\ (C_2): x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0 \end{cases}$

a) Chứng minh rằng hai đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau.

b) Viết phương trình đường tròn qua giao điểm của (C_1) và (C_2) và qua điểm $M(0; 1)$.

Ví dụ 5. Trên mặt phẳng tọa độ cho $A(1; 0); B(0; 2); O(0; 0)$ và đường tròn $(C): (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$. Viết phương trình đường thẳng đi qua các giao điểm của đường thẳng (C) và đường tròn ngoại tiếp ΔOAB .

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho 2 đường tròn $\begin{cases} (C_1): x^2 + y^2 = 9 \\ (C_2): x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0 \end{cases}$. Viết phương trình trục đẳng phương d của 2 đường tròn (C_1) và (C_2) . Chứng minh rằng nếu K thuộc d thì khoảng cách từ K đến tâm của (C_1) nhỏ hơn khoảng cách từ K đến tâm của (C_2) .

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(C): x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C_1) tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox, Oy đồng thời tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).

Ví dụ 8. Cho họ đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$ và $(C'): x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 4my - 5 = 0$.

Tìm m để hai đường tròn tiếp xúc với nhau

Đ/s : $m = -1; m = \frac{3}{5}$

Ví dụ 9. Cho họ đường tròn $(C'): x^2 + y^2 - 4mx - 2my + \frac{9m^2}{2} - m - \frac{1}{2} = 0$.

Tìm m để (C_m) tiếp xúc với đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x + 7 = 0$.

Đ/s : $m = 3; m = \frac{1}{3}$

Ví dụ 10. Trong mặt phẳng Oxy cho 2 đường tròn $\begin{cases} (C_1): x^2 + y^2 = 8 \\ (C_2): x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{cases}$

- a) Chứng minh rằng hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A; B.
b) Viết phương trình đường tròn qua A, B và tiếp xúc với đường thẳng $d: x - 2y + 4 = 0$.

Ví dụ 11. Cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ và điểm $A(4; 7)$.

- a) Lập phương trình đường tròn (C') tiếp xúc với (C) biết (C') đi qua điểm A.
b) Trong trường hợp (C') tiếp xúc ngoài (C) hãy tìm trên (C) điểm M, trên (C') điểm N sao cho tam giác IMN có diện tích lớn nhất (với I là tâm của đường tròn (C)).

Ví dụ 12. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4\sqrt{3}x - 4 = 0$. A là giao điểm của đường tròn và tia Oy. Lập phương trình đường tròn (C') tiếp xúc ngoài với (C) tại điểm A.

Đ/s: $(C'): (x - \sqrt{3})^2 + (y - 3)^2 = 4$

Ví dụ 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$. Đường tròn (C') tâm $J(3; 5)$ cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Đ/s: AB: $x + y - 3 = 0$

Ví dụ 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$. Đường tròn (C') tâm $I(2; 2)$ cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Ví dụ 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') có tâm $M(5; 1)$ và (C') cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{5}$.

Ví dụ 16. Cho các đường tròn $\begin{cases} (C): x^2 + (y-1)^2 = 5 \\ (C_m): x^2 + y^2 + 2(m+1)x + 2my + 3 - 4m = 0 \end{cases}$

Tìm m để hai đường tròn cắt nhau tại A, B sao cho AB đi qua $N\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

Đ/s: $m = 2$

Ví dụ 17. Cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + y^2 = 10$ và đường thẳng $d: 2x - y + 3 = 0$.

Tìm điểm M trên d để đường tròn đường kính MI cắt (C) tại A, B sao cho $N(1; 1)$ thuộc AB.

Đ/s: $M\left(\frac{7}{2}; 10\right)$

Ví dụ 18. Cho đường tròn $(C): x^2 + (y-1)^2 = 10$ và đường thẳng $d: x + y - 1 = 0$.

Tìm điểm M trên d để đường tròn đường kính MI cắt (C) tại A, B sao cho $N(1; 1)$ thuộc AB.

Đ/s: $M\left(10; -\frac{9}{2}\right)$

09. TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Thầy Đặng Việt Hùng

Dạng 1: Tiếp tuyến tại điểm thuộc đường tròn**Ví dụ 1.** Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại các điểm A, B :

a) $(C): (x-1)^2 + (y-3)^2 = 10; \quad A(2;0), B(-2;2)$

b) $(C): (x+2)^2 + y^2 = 4; \quad A(0;-2), B(0;0)$

c) $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0; \quad A(2;-2), B(3;-1)$

Dạng 2: Tiếp tuyến có yếu tố vuông góc, song song**Ví dụ 1.** Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn:

a) tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: 2x - y + 1 = 0$.

b) tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d': x - 3y + 2 = 0$.

Ví dụ 2. Cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$. Viết phương trình tiếp tuyến và tìm tiếp điểm tương ứng:

a) tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: x - 2y + 1 = 0$.

Đ/s: Tiếp điểm $A(2; 0)$

b) tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d': x + 3y + 2 = 0$.

Đ/s: Tiếp điểm $A(-2; 1)$ **Dạng 3: Tiếp tuyến đi qua một điểm cho trước****Ví dụ 1.** Cho đường tròn $(C): (x+1)^2 + (y+2)^2 = 10$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn

a) tiếp tuyến đi qua điểm $M(6; -1)$

Đ/s: $x + 3y - 3 = 0$

b) tiếp tuyến đi qua điểm $N(1; 2)$

Đ/s: $x - 3y + 5 = 0$ **Ví dụ 2.** Cho đường tròn $(C): x^2 + (y+1)^2 = 17$. Viết phương trình tiếp tuyến và tìm tiếp điểm tương ứng

a) tiếp tuyến đi qua điểm $M(-5; 2)$

Đ/s: $A(1; 3)$; phương trình tiếp tuyến $x + 3y - 3 = 0$

b) tiếp tuyến đi qua điểm $N(-3; 4)$

Đ/s: $A(-4; 0)$; phương trình tiếp tuyến $4x - y + 16 = 0$ **Dạng 4: Tiếp tuyến có hệ số góc, tạo góc****Ví dụ 1.** Cho đường tròn $(C): x^2 + (y+2)^2 = 5$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn

a) tiếp tuyến có hệ số góc $k = -2$.

b) tiếp tuyến tạo với trục Ox góc 60° .

Ví dụ 2. Cho đường tròn (C): $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 13$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn

a) tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: x + y + 1 = 0$ góc α với $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$.

Đ/s: $3x + 2y - 6 = 0$

b) tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: x + 2y + 3 = 0$ góc α với $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{65}}$.

Đ/s: $2x - 3y - 4 = 0$

Dạng 5: Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

Ví dụ. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn

a) (C): $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$;

(C'): $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$

b) (C): $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$;

(C): $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$

c) (C): $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$;

(C): $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$

d) (C): $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$;

(C): $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$

10. BÀI TOÁN VỀ ĐIỂM VÀ ĐƯỜNG TRÒN – P1

Thầy Đặng Việt Hùng

Ví dụ 1. (Khối A – 2011)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x + y + 2 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi I là tâm của đường tròn (C) , M là một điểm thuộc d . Qua điểm M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (với A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ của điểm M biết tứ giác $MAIB$ có diện tích bằng 10.

Đ/s: $M(-3;1)$ **Ví dụ 2. (Khối D – 2007)**

Cho đường tròn và đường thẳng $\begin{cases} (C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \\ d: 3x - 4y + m = 0 \end{cases}$. Tìm m để trên d có duy nhất một điểm P mà từ

đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới (C) (với A, B là các tiếp điểm) sao cho tam giác PAB đều.

Đ/s: $MI = 2R \Rightarrow m = 1; m = -41$

Ví dụ 3. Cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-4)^2 = 8$, $d: x - y - 2 = 0$. Tìm điểm M trên d để qua M có thể kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB tới (C) (với A, B là các tiếp điểm) sao cho tam giác IAB có diện tích max.

Đ/s: $M(2;0), M(6;4)$

Ví dụ 4. Cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$, $M(2;0)$. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới (C) (với A, B là các tiếp điểm). Viết phương trình đường thẳng AB .

Đ/s: $AB: x + y - 1 = 0$ **Ví dụ 5. (Khối B – 2006)**

Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$, $M(-3;1)$. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới (C) (với A, B là các tiếp điểm). Viết phương trình đường thẳng AB .

Đ/s: $AB: 2x + y - 3 = 0$

Ví dụ 6. Cho đường tròn $(C): (x-4)^2 + y^2 = 4$, $N(4;1)$. Tìm điểm M trên Oy sao cho qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới (C) (với A, B là các tiếp điểm) đồng thời AB đi qua N .

Đ/s: $M(0;4)$ **BÀI TẬP LUYỆN TẬP:**

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x + 2y - 3 = 0$ và đường tròn

$(C): (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$. Gọi I là tâm của đường tròn (C) , M là một điểm thuộc d . Qua điểm M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (với A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ của điểm M biết tứ giác $MAIB$ có diện tích bằng $2\sqrt{6}$.

Đ/s: $M(3; 0)$.

Bài 2. Cho đường thẳng $d: x - y + 2 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Gọi I là tâm của đường tròn (C) , M là một điểm thuộc d . Qua điểm M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (với A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ của điểm M biết tứ giác $MAIB$ có diện tích bằng $6\sqrt{2}$.

Đ/s: $M(0; 2), M(-3; -1)$

Bài 3. Cho đường tròn và đường thẳng $\begin{cases} (C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \\ d: x + y + m = 0 \end{cases}$.

Tìm m để trên d có duy nhất một điểm M mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB tới (C) (với A, B là các tiếp điểm) sao cho tam giác MAB vuông.

Đ/s: $MI = R\sqrt{2} \Rightarrow m = -5; m = 7$

Bài 4. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$. Tìm điểm M thuộc trục tung sao cho qua có thể kẻ được hai tiếp tuyến đến đường tròn (C) và góc giữa hai tiếp tuyến bằng 60°

Đ/s: $M(0; \sqrt{7}), M(0; -\sqrt{7})$

Bài 5. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 4$, $A\left(1; -\frac{8}{3}\right), B(3; 0)$. Tìm điểm M trên đường tròn sao tam giác

MAB có diện tích bằng $\frac{20}{3}$.

Đ/s: $M(-2; 0), M\left(-\frac{14}{25}; \frac{48}{75}\right)$

Bài 6. Cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$

Hình vuông $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn đã cho. Tìm tọa độ các đỉnh A, C biết rằng cạnh AB đi qua $M(-3; -2)$ và điểm A có hoành độ dương.

Đ/s: $A(6; 1), C(-2; 5)$

10. BÀI TOÁN VỀ ĐIỂM VÀ ĐƯỜNG TRÒN – P2

Thầy Đặng Việt Hùng

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$, $d: x + 2y - 12 = 0$. Tìm điểm M thuộc d sao cho qua M có thể kẻ được hai tiếp tuyến đến đường tròn (C) và góc giữa hai tiếp tuyến bằng 60°

Đ/s: $M\left(3; \frac{9}{2}\right), M\left(\frac{27}{5}; \frac{33}{10}\right)$

Ví dụ 2. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$, $d: x - y + 1 = 0$. Tìm điểm M thuộc d sao cho qua M có thể kẻ được hai tiếp tuyến đến đường tròn (C) , với các tiếp điểm là A, B đồng thời $\widehat{AMB} = 60^\circ$.

Đ/s: $M(3; 4), M(-3; -2)$

Ví dụ 3. Cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$, $N(2; 1)$. Tìm điểm M trên $d: x + y + 2 = 0$ sao cho qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới (C) (với A, B là các tiếp điểm) đồng thời AB đi qua N .

Đ/s: $M\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$

Ví dụ 4. Cho đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$, $d: x + y + 5 = 0$. Tìm điểm M trên d sao cho qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới (C) (với A, B là các tiếp điểm) và độ dài AB lớn nhất?

Hướng dẫn:

Để dàng tìm được $H = AB \cap MI \Rightarrow MA^2 = MI^2 - IA^2 = 2t^2 + 6t + 41$

Từ hệ thức $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AM^2} \rightarrow AH^2 = \frac{2t^2 + 6t + 45}{4(2t^2 + 6t + 41)} \rightarrow AB^2 = 4AH^2 = 1 + \frac{4}{2t^2 + 6t + 41}$

Từ đó dễ dàng tìm được đáp án $M\left(-\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}\right)$

Ví dụ 5. Cho đường tròn $(C): (x+1)^2 + y^2 = 5$, $N(1; -3)$. Tìm điểm M trên $d: 4x + y - 3 = 0$ sao cho qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới (C) (với A, B là các tiếp điểm) đồng thời khoảng cách từ N tới AB lớn nhất?

Đ/s: Hình như bài này thầy giải sai t trong video rồi!!!

Ví dụ 6. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$, $A(5; -6)$. Từ điểm A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới (C) (với B, C là các tiếp điểm). Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Hướng dẫn:

Ta dễ chứng minh được tam giác ABC đều, suy ra tâm nội tiếp trùng với trọng tâm G của tam giác ABC .

Để dàng tìm được $H\left(\frac{1}{2}; 0\right), H = BC \cap AI \Rightarrow G(2; -2)$

Khi đó $(C): (x-2)^2 + (y+2)^2 = \frac{25}{4}$

Ví dụ 7. Cho đường tròn $(C): x^2 + (y-2)^2 = 3$, $N(0; -1)$. Tìm điểm M trên $d: 2x - 3y + 2 = 0$ sao cho qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới (C) (với A, B là các tiếp điểm) đồng thời AB đi qua N .

Đ/s: $M\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ tuy nhiên điểm này không thỏa mãn dk nhé!

Ví dụ 8. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$, $d: x + y - 2 = 0$. Biết d cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm M trên d sao cho tam giác MAB có chu vi lớn nhất?

Đ/s: $M(2 + \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP:

Bài 1. Cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$, $N(1; -1)$. Tìm điểm M trên $d: x + y + 2 = 0$ sao cho qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới (C) (với A, B là các tiếp điểm) đồng thời AB đi qua N .

Đ/s: $M(1; 2)$

Bài 2. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$, $N(2; -1)$. Tìm điểm M trên $d: 2x - y + 1 = 0$ sao cho qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới (C) (với A, B là các tiếp điểm) đồng thời AB đi qua N .

Đ/s: $M(-1; -1)$

Bài 3. Cho đường tròn $(C): x^2 + (y+1)^2 = 2$, $d: x - 2y - 4 = 0$. Tìm điểm M trên d để qua M có thể kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB tới (C) (với A, B là các tiếp điểm) sao cho tam giác MAB có diện tích bằng 1.

Đ/s: Bài này tương đối phức tạp nhé!

Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + y^2 = 1$. Gọi I là tâm của (C) . Xác định tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho $\widehat{IMO} = 30^\circ$.

Đ/s: $M\left(\frac{3}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Bài 5. Cho đường tròn và đường thẳng $\begin{cases} (C): x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0 \\ d: x + y - 1 = 0 \end{cases}$.

Xác định tọa độ các đỉnh hình vuông $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (C) , biết A nằm trên d .

Bài 6. Cho đường tròn và đường thẳng $\begin{cases} (C): x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ d: x - y + 3 = 0 \end{cases}$.

Tìm tọa độ điểm M nằm trên d sao cho đường tròn tâm M , có bán kính gấp đôi bán kính đường tròn (C) , tiếp xúc ngoài với (C) .

Bài 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$.

Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng $d: 2x - y + 3 = 0$ sao cho $MI = 2R$, trong đó I là tâm và R là bán kính của đường tròn (C) .

Bài 8. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$ và đường thẳng $(\Delta): 2x - 3y - 1 = 0$. Chứng minh rằng (Δ) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm tọa độ điểm M trên đường tròn (C) sao cho diện tích tam giác ABM lớn nhất.

Đ/s: $M(-3; 5)$

Bài 9. Cho đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y-4)^2 = 35$, $A(5; 5)$. Tìm các điểm B, C trên đường tròn sao cho tam giác ABC cân tại A .

Hướng dẫn : Xử lí tạo góc của đường AI.

Bài 10. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$, $d: x + y - 3 = 0$. Biết d cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm M trên d sao cho tam giác MAB có chu vi lớn nhất?

Đ/s: $\varphi = -\frac{3\pi}{4} \rightarrow M$ nhé!

11. BÀI TOÁN VỀ ELIPSE – P1

Thầy Đặng Việt Hùng

Một số các kiến thức quan trọng về Elipse:

+ Phương trình **chính tắc** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ trong đó $a > b > 0$; và $a^2 = b^2 + c^2$.

Với elip chính tắc thì các tiêu điểm thuộc trục lớn, trục lớn nằm trên Ox .

+ Một điểm M thuộc elip thì $MF_1 + MF_2 = 2a$

+ Độ dài trục lớn bằng $2a$, trục nhỏ bằng $2b$, tiêu cự bằng $2c$.

+ Các đỉnh của elip có tọa độ : $(a; 0), (-a; 0), (0; b), (0; -b)$ và hai tiêu điểm $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$

+ Tâm sai của elip: $e = \frac{c}{a}$; ($e < 1$)

+ Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở: $x = \pm a; y = \pm b$

Suy ra, chu vi và diện tích hình chữ nhật là $C = 4(a + b); S = 4ab$

+ Phương trình các đường chuẩn $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c} \rightarrow$ khoảng cách giữa hai đường chuẩn $d = 2\frac{a}{e} = 2\frac{a^2}{c}$

+ Bán kính qua tiêu: $MF_1 = a + ex_M = a + \frac{c}{a}x_M$; $MF_2 = a - ex_M = a - \frac{c}{a}x_M$

+ Phương trình của **elip liên hợp** với elip chính tắc là $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ trong đó $a > b > 0$; và $a^2 = b^2 + c^2$.

Với elip liên hợp thì trục lớn thuộc Oy .

Ví dụ 1. Xác định các yếu tố của các elip sau

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

c) $x^2 + 4y^2 = 4$

Ví dụ 2. Lập phương trình chính tắc của elip trong các trường hợp sau:

a) Độ dài trục lớn bằng 10, tiêu cự bằng 8.

b) Tiêu cự bằng 8 và tâm sai bằng $\frac{3}{5}$.

c) Độ dài trục nhỏ bằng 10 và tâm sai bằng $\frac{12}{13}$.

Ví dụ 3. Lập phương trình chính tắc của elip trong các trường hợp sau:

a) Độ dài trục lớn bằng 6; tiêu cự bằng 4.

b) Một tiêu điểm là $F_1(-2; 0)$ và độ dài trục lớn bằng 10.

c) Trục nhỏ bằng 4; tâm sai $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 4. Lập phương trình chính tắc của elip trong các trường hợp sau:

- a) khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng 16; trục lớn bằng 8
 b) khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng 32; tâm sai bằng 0,5
 c) tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và chu vi hình chữ nhật cơ sở bằng 20.

Ví dụ 5. Lập phương trình chính tắc của elip trong các trường hợp sau:

- a) Một tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{3}; 0)$ và đi qua điểm $M\left(1; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$
 b) Đi qua 2 điểm $A(2; 1)$ và $B\left(\sqrt{5}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
 c) Tiêu cự bằng 8, (E) qua $M(\sqrt{15}; -1)$
 d) Trục lớn bằng 12; qua điểm $M(-2\sqrt{5}; 2)$

Ví dụ 6. Lập phương trình của elip trong các trường hợp sau:

- a) (E) đi qua các điểm $M(4; 0)$ và $N(0; 3)$.
 b) (E) đi qua các điểm $M(3\sqrt{3}; 2)$, $N(3; 2\sqrt{3})$.
 c)* Hai tiêu điểm $F_1(-2; 0)$, $F_2(2; 0)$ và (E) đi qua gốc tọa độ.

Ví dụ 7. Lập phương trình của elip trong các trường hợp sau:

- a) Hai tiêu điểm là $F_1(-6; 0)$ và $F_2(6; 0)$ tâm sai $e = \frac{2}{3}$
 b) Trục lớn thuộc Ox, độ dài trục lớn bằng 8; trục nhỏ thuộc Oy có độ dài bằng 6.
 c) Trục lớn thuộc Oy có độ dài bằng 10, tiêu cự bằng 6.
 d) Hai tiêu điểm thuộc Ox; trục lớn có độ dài bằng 26, tâm sai $e = \frac{12}{13}$.

Ví dụ 8. Cho elip có hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}; 0)$, $F_2(\sqrt{3}; 0)$ và đi qua điểm $A\left(\sqrt{3}; \frac{1}{2}\right)$.

- a) Lập phương trình chính tắc của elip
 b) Với mọi điểm M thuộc elip, tính giá trị biểu thức $P = MF_1^2 + MF_2^2 - 3OM^2 - MF_1 \cdot MF_2$

Ví dụ 9. Cho elip $4x^2 + 9y^2 = 36$, $M(1; 1)$.

Viết pt đường d đi qua M , cắt elip tại hai điểm phân biệt A, B sao cho M là trung điểm của AB ,

Đ/s: $4x + 9y - 13 = 0$

Ví dụ 10. Cho elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $M(1; 1)$.

Viết pt đường d đi qua M , cắt elip tại hai điểm phân biệt A, B sao cho M là trung điểm của AB ,

Đ/s: $9x + 25y - 34 = 0$

11. BÀI TOÁN VỀ ELIPSE – P2

Thầy Đặng Việt Hùng

Ví dụ 1. Tìm điểm M trên (E) thỏa mãn:

a) $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. Tìm M trên (E) sao cho $MF_1 = 2MF_2$

b) $(E): 16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$. Tìm M trên (E) sao cho M nhìn F_1, F_2 dưới 1 góc $60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$.

c) Tìm M nằm trên $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ nhìn 2 tiêu điểm của (E) dưới 1 góc vuông.

d) Viết phương trình chính tắc của (E) biết 1 điểm M có hoành độ $x_M = 2$ nằm trên (E) và thỏa mãn

$$MF_1 = \frac{13}{3}; MF_2 = \frac{5}{3}$$

Ví dụ 2. Cho $(E): 4x^2 + 9y^2 = 36$. Tìm M trên (E) sao cho:

a) M có tọa độ là các số nguyên.

b) M có tổng các tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất, lớn nhất.

Ví dụ 3. $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng $(d): 2x + 15y - 10 = 0$.

a) CMR (d) luôn cắt (E) tại 2 điểm phân biệt A, B . Tính độ dài AB .

b) Tìm C trên (E) sao cho $\triangle ABC$ cân tại A biết $x_A > 0$.

c) Tìm C trên (E) sao cho $S_{\triangle ABC}$ lớn nhất.

Ví dụ 4. Cho $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng $(d): 3x + 4y + 24 = 0$.

a) CMR (d) không cắt (E) .

b) Tìm điểm M trên (E) sao cho khoảng cách từ M đến d là nhỏ nhất.

Ví dụ 5. Cho $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. A, B là 2 điểm trên (E) sao cho $AF_1 + BF_2 = 8$.

a) Tính $AF_2 + BF_1$.

b) Tìm tọa độ điểm M trên (E) sao cho $MF_1 = 4MF_2$.

Ví dụ 6. Cho 2 elip $(E_1): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; $(E_2): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$. Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của 2 elip đó.

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Viết phương trình đường thẳng

song song với Oy và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 4$.

Gọi phương trình đường thẳng song song với Oy là $(d): x = a$ (với $a \neq 0$). Tung độ giao điểm của (d) và (E)

$$\text{là: } \frac{a^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 9 \cdot \frac{25 - a^2}{25} \Leftrightarrow y = \pm \frac{3}{5} \sqrt{25 - a^2} \quad (|a| \leq 5)$$

$$\text{Vậy } A\left(a; \frac{3}{5} \sqrt{25 - a^2}\right), B\left(a; -\frac{3}{5} \sqrt{25 - a^2}\right) \Rightarrow AB = \frac{6}{5} \sqrt{25 - a^2}$$

$$\text{Do đó } AB = 4 \Leftrightarrow \frac{6}{5} \sqrt{25 - a^2} = 4 \Leftrightarrow 25 - a^2 = \frac{100}{9} \Leftrightarrow a = \pm \frac{5\sqrt{5}}{3} \text{ (thỏa mãn đk)}$$

$$\text{Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là } x = \frac{5\sqrt{5}}{3}, x = -\frac{5\sqrt{5}}{3}$$

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho điểm $C(2;0)$ và elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E) , biết rằng hai điểm A, B đối xứng với nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều.

$$\text{Đ/s: } A\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right) \text{ hoặc } A\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$$

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ và điểm $A(0; 2)$. Tìm B, C thuộc (E)

đối xứng với nhau qua Oy sao cho tam giác ABC là tam giác đều.

$$\text{Đ/s: } B\left(\frac{17\sqrt{3}}{3}; \frac{-22}{13}\right), C\left(-\frac{17\sqrt{3}}{3}; \frac{-22}{13}\right) \text{ hoặc } B\left(-\frac{17\sqrt{3}}{3}; \frac{-22}{13}\right), C\left(\frac{17\sqrt{3}}{3}; \frac{-22}{13}\right)$$

Ví dụ 10. Cho 2 elip $(E_1): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ và $(E_2): \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{6} = 1$

a) CMR 2 elip cắt nhau tại 4 điểm phân biệt A, B, C, D và $ABCD$ là hình chữ nhật

b) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp hcn $ABCD$.

Ví dụ 11. Cho $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng $d: 2x + 5y - 10 = 0$

a) CMR: (d) luôn cắt (E) tại 2 điểm phân biệt A, B . Tính độ dài AB .

b) Tìm điểm C trên (E) sao cho tam giác ABC cân tại $A, x_A > 0$.

$$\text{Đ/s: } C(0; -2)$$

Ví dụ 12. Cho $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1; d: x - \sqrt{2}y + 2 = 0$

a) CMR: (d) cắt (E) tại 2 điểm phân biệt A, B . Tính độ dài AB .

b) Tìm điểm C trên (E) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỌN LỌC ÔN TẬP TỌA ĐỘ PHẪNG – P2

Bài 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình: $(x-1)^2 + y^2 = 4$ và $A(3; 0)$. Xác định hai điểm B và C nằm trên đường tròn sao cho $\triangle ABC$ đều.

Bài 2: Cho tam giác ABC biết đường cao và trung tuyến xuất phát từ A lần lượt là $6x - 5y - 7 = 0$ và $x - 4y + 2 = 0$. Tính diện tích tam giác ABC biết trọng tâm tam giác thuộc trục hoành và đường cao từ đỉnh B đi qua $E(1; -4)$

Bài 3: Cho tam giác ABC có $M(1; -2)$ là trung điểm AB, trục Ox là phân giác góc A, đỉnh B, C thuộc đường thẳng đi qua $N(-3; 0)$ và $P(0; 2)$. Tìm A, B, C và diện tích tam giác.

Bài 4: Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng $d_1: 2x + y - 4 = 0$ qua điểm $M(1; -1)$ cắt đường thẳng (d_2) tại A, B sao cho $AB = 2\sqrt{7}$.

Đ/s: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9; (x-13)^2 + (y+22)^2 = 585$

Bài 5: Viết phương trình đường thẳng d qua $M(1; -1)$ cắt đường tròn tâm $I(4; 0)$ bán kính $R = 5$ tại A, B sao cho $MA = 3MB$.

Đ/s: $x + 2y + 1 = 0$ hoặc $2x - y - 3 = 0$.

Bài 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông cân tại A ngoại tiếp (C): $x^2 + y^2 = 2$. Tìm tọa độ 3 đỉnh của tam giác biết điểm A thuộc tia Ox.

Đ/s: $A(2; 0); B(\sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}); C(-\sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$

Bài 7: Cho hai đường tròn $\begin{cases} (C_1): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \\ (C_2): x^2 + y^2 - 10x - 6y + 30 = 0 \end{cases}$ có tâm là I và J. Gọi H là tiếp điểm của (C_1) và

(C_2). Gọi d là tiếp tuyến chung ngoài không qua H của (C_1) và (C_2). Tìm giao điểm K của d và IJ. Viết phương trình đường tròn qua K tiếp xúc với (C_1) và (C_2) tại H.

Đ/s: $K(11; 11); \left(x - \frac{37}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{31}{5}\right)^2 = 36$.

Bài 8: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(1; 3)$ nằm ngoài (C): $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d qua A cắt (C) tại hai điểm B và C sao cho $AB = BC$.

Bài 9: Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đường cao $AH: x - 3\sqrt{3} = 0$, phương trình hai đường phân giác trong góc B và góc C lần lượt là $x - \sqrt{3}y = 0$ và $x + \sqrt{3}y - 6 = 0$, biết bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng 3. Viết phương trình các cạnh tam giác biết đỉnh A có tung độ dương.

Đ/s: $(AB): y = \sqrt{3}x; (AC): y = -\sqrt{3}x + 18$

Bài 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (T) có phương trình: $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ và $I(8; 5)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho qua M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (T) đồng thời đường thẳng AB đi qua I (A, B là hai tiếp điểm).

Đ/s: $M(0; 4)$

Bài 11: Cho 3 đường thẳng $\begin{cases} d_1 : x + y + 3 = 0 \\ d_2 : x - y + 4 = 0 \\ d_3 : x - 2y = 0 \end{cases}$. Viết phương trình đường tròn có tâm I là giao điểm của d_1 và d_2 đồng thời cắt d_3 tại AB sao cho $AB = 2$.

Đ/s: $\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{101}{20}$.

Bài 12: Cho các đường tròn $\begin{cases} (C_1) : (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{2} \\ (C_2) : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng (d) tiếp xúc với

đường tròn (C_1) cắt đường tròn (C_2) theo dây cung có độ dài bằng $2\sqrt{2}$.

Bài 13: Trong mặt phẳng Oxy cho ba đường thẳng $d_1 : x - 3y = 0; d_2 : 2x + y - 5 = 0; d_3 : x - y = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết rằng $A \in d_1; C \in d_2; B, D \in d_3$.

Bài 14: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d : \sqrt{3}x - y + 1 = 0$, A là giao của d và Ox . Lập phương trình đường thẳng d' vuông góc với d và cắt d tại B , cắt Ox tại C sao cho ΔABC có diện tích là $2\sqrt{3}$.

Bài 15: Cho ΔABC có $B(1; 2)$, phân giác trong góc A có phương trình $d : 2x + y - 1 = 0$; khoảng cách từ C đến d bằng 2 lần khoảng cách từ B đến d . Tìm A, C biết C thuộc trục tung.

Bài 16: Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng $\begin{cases} d : x + 2y - 1 = 0 \\ d' : 3x + y + 7 = 0 \end{cases}$ cắt nhau tại điểm I và điểm $M(1; 2)$.

Viết phương trình đường Δ qua M cắt d, d' lần lượt tại A, B sao cho $AI = \sqrt{2}AB$.

Bài 17: Trong mặt phẳng cho điểm $A(7; 1)$ và hai đường thẳng $\begin{cases} d_1 : 2x + y + 7 = 0 \\ d' : 4x + 3y - 27 = 0 \end{cases}$. Lập phương trình

đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết B thuộc d_1, C thuộc d_2 và nhận $G\left(\frac{7}{3}; \frac{5}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác.

Bài 18: Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), G\left(0; \frac{2}{3}\right)$ lần lượt là trung điểm của cạnh BC và trọng tâm tam giác ABC . Viết phương trình các cạnh của tam giác.

Bài 19: Trong mặt phẳng cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ và điểm $A(-1; 3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (C) và có diện tích bằng 10.

Bài 20: Cho hai đường tròn $(C_1) : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 14 = 0, (C_2) : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C_1) tại A, B cắt (C_2) tại C, D sao cho $AB = 2\sqrt{7}; CD = 8$

Đ/s: $2x + y + 3\sqrt{5} - 3 = 0; 2x + y - 3\sqrt{5} - 3 = 0$

Bài 21: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết đường cao và trung tuyến xuất phát từ A lần lượt có phương trình $6x - 5y - 7 = 0; x - 4y + 2 = 0$. Tính diện tích tam giác ABC biết rằng trọng tâm của tam giác thuộc trục hoành và đường cao xuất phát từ đỉnh B đi qua điểm $E(1; -4)$.

Bài 22: Trong mặt phẳng Oxy cho ΔABC vuông cân tại A , các đỉnh A, B, C lần lượt nằm trên các đường thẳng $d_1 : x + y - 5 = 0; d_2 : x + 1 = 0; d_3 : y + 2 = 0; BC = 5\sqrt{2}$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C .

12. BÀI TOÁN VỀ HYPEBOL

Thầy Đặng Việt Hùng

Dạng 1: Lập phương trình chính tắc của (H)**Bài 1.** Lập phương trình chính tắc của (H) trong các trường hợp sau

1. Tiêu cự 10, trục ảo 8
2. Trục thực 16, tâm sai $\frac{5}{4}$
3. (H) có một tiêu điểm là (5; 0) và độ dài trục thực bằng 8.
4. Khoảng cách giữa các đường chuẩn $\frac{50}{13}$, tiêu cự 26
5. (H) có tiêu cự bằng $2\sqrt{3}$ và một đường tiệm cận là $y = \frac{2x}{3}$
6. Khoảng cách giữa các đường chuẩn $\frac{104}{5}$, tiệm cận $y = \pm \frac{3x}{4}$
7. (H) có tiêu điểm $F_1(-7; 0)$ và đi qua $M(-2; 12)$
8. (H) đi qua điểm $A(4\sqrt{2}; 5)$ và có đường tiệm cận $y = \frac{5x}{4}$
9. (H) có tâm sai $e = \sqrt{5}$ và đi qua điểm $A(\sqrt{10}; 6)$
10. (H) đi qua $M(-2; 1)$ và góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60° .
11. (H) có tâm sai $e = 2$, các tiêu điểm của (H) trùng với các tiêu điểm của (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
12. Điểm M thuộc (H) có hoành độ $x_M = -5$ và $MF_1 = \frac{9}{4}$; $MF_2 = \frac{41}{4}$

Dạng 2: Tìm điểm trên Hypebol thỏa mãn điều kiện cho trước**Bài 1.** Cho (H): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$

1. Tìm trên (H) điểm M có tung độ là 1
2. Tìm trên (H) điểm M sao cho góc F_1MF_2 bằng 90° .
3. Tìm trên (H) điểm M sao cho $MF_1 = 2MF_2$

Bài 2. Cho (H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

1. Tìm trên (H) điểm M có hoành độ bằng $4\sqrt{2}$.
2. Tìm trên (H) điểm M sao cho góc F_1MF_2 bằng 120° .
3. Tìm trên (H) điểm M sao cho $3MF_1 = MF_2$

15. MỘT SỐ BÀI TOA ĐỘ PHẪNG HAY VÀ KHÓ – P1

Thầy Đặng Việt Hùng

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$, A là giao của d và Ox. Lập phương trình đường thẳng d' vuông góc với d và cắt d tại B , cắt Ox tại C sao cho $\triangle ABC$ có diện tích là $2\sqrt{3}$.

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình: $(x-1)^2 + y^2 = 4$ và $A(3; 0)$. Xác định hai điểm B và C nằm trên đường tròn sao cho $\triangle ABC$ đều.

Bài 3. Trong hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(3; 2)$, các đường thẳng $\Delta_1: x + y - 3 = 0$ và đường thẳng $\Delta_2: x + y - 9 = 0$. Tìm tọa độ điểm B thuộc Δ_1 và điểm C thuộc Δ_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .

Bài 4. Xác định tọa độ điểm $M(x; y)$ biết M ở phía trên Ox, $\widehat{AMB} = 90^\circ$, $\widehat{MAB} = 30^\circ$. và $A(-2; 0)$, $B(2; 0)$.

Bài 5. Trong mặt phẳng Oxy, gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với $A(2; -2)$, $B(4; 0)$, $C(3; \sqrt{2} - 1)$ và đường thẳng $d: 4x + y - 4 = 0$. Tìm M trên d sao cho tiếp tuyến của (C) qua M tiếp xúc với (C) tại N sao cho diện tích tam giác NAB lớn nhất.

Đ/s: $M(2; -4), M\left(\frac{6}{5}; -\frac{4}{5}\right)$.

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(6; 6)$, đường thẳng đi qua trung điểm các cạnh AB , AC có phương trình $x + y - 4 = 0$ và đường cao kẻ từ C có phương trình $3x + 2y + 3 = 0$. Xác định tọa độ các điểm B , C . Viết phương trình đường tròn đi qua 3 điểm A, B', C trong đó B' là điểm trên đường thẳng BC sao cho tam giác $AB'C$ cân tại A .

Đ/s: $B\left(-\frac{18}{5}; -\frac{2}{5}\right); C(5; -9); \left(x + \frac{17}{16}\right)^2 + \left(y + \frac{17}{16}\right)^2 = \frac{246}{16} = \frac{123}{8}$

Bài 7. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(-1; 14)$ và đường tròn (C) tâm $I(1; -5)$, bán kính $R = 13$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A cắt (C) tại M , N mà khoảng cách từ M đến AI bằng một nửa khoảng cách từ N đến AI .

Đ/s: $x + y - 13 = 0$.

Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại B , phương trình cạnh $AB: \sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3} = 0$, điểm B thuộc trục Ox. Biết tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là $I(0; 2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác

Đ/s: $B(2; 0); C(\sqrt{3} - 1; 1 - \sqrt{3})$

Bài 9. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$. Gọi I là tâm đường tròn (C) . Đường thẳng Δ qua $M(1; -3)$ cắt (C) tại A , B . Viết phương trình đường thẳng Δ biết tam giác IAB có diện tích bằng 8 và cạnh AB là cạnh lớn nhất.

Đ/s: $y + 3 = 0$ và $4x + 3y + 5 = 0$.

Bài 10. Cho hai đường thẳng $d_1: x - 2y = 0$, $d_2: 3x - y + 1 = 0$. Viết phương trình đường tròn cắt d_1 theo dây cung $AB = 6$ và tiếp xúc với d_2 tại B .

$$\text{Đ/s: } \left(x - \frac{-2-9\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{-1+3\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 18 \text{ hoặc } \left(x - \frac{-2+9\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{-1-3\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 18$$

Bài 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A có $C(-4; 1)$ phân giác trong góc A có phương trình: $x + y - 5 = 0$. Viết phương trình BC biết diện tích tam giác là 24 và đỉnh A có hoành độ dương.

$$\text{Đ/s: } B(4; 7); BC: 3x - 4y - 16 = 0.$$

Bài 12. Trong mặt phẳng cho tam giác ABC cân tại A, biết phương trình cạnh $AB: 3\sqrt{7}x - y - 3\sqrt{7} = 0$. Điểm B, C thuộc trục Ox và điểm A thuộc góc phần tư thứ nhất. Xác định tọa độ các đỉnh tam giác biết chu vi tam giác bằng 9 và tìm điểm M thuộc AB, N thuộc BC sao cho MN đồng thời chia đôi chu vi và diện tích tam giác ABC.

$$\text{Đ/s: } A(2; 3\sqrt{7}), B(1; 0); C(3; 0); M(2; 3\sqrt{7}), N(2; 0)$$

Bài 13. Cho tam giác ABC có diện tích bằng 2, $AB: x - y = 0$ biết $M(2; 1)$ là trung điểm của BC, tìm tọa độ trung điểm K của AC.

$$\text{Đ/s: } K(1; 0) \text{ hoặc } K(3; 2)$$

Bài 14. Cho tam giác ABC có đường cao kẻ từ B và phân giác góc A là $x - 2y - 2 = 0$, $x - y - 1 = 0$, điểm $M(0; 2)$ thuộc AB và $AB = 2AC$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác.

$$\text{Đ/s: } B(0; 1), C(3; 1)$$

Bài 15. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có phương trình cạnh BC: $x + 7y - 31 = 0$, điểm $N(7; 7)$ thuộc AC, điểm $M(2; -3)$ thuộc AB và nằm ngoài đoạn AB. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC.

$$\text{Đ/s: } A(-1; 1); B(-4; 5), C(3; 4)$$

Bài 16. Cho đường tròn (C): $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 50$. Viết phương trình đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (C) tại M và cắt hai trục tọa độ tại A, B sao cho M là trung điểm của AB.

$$\text{Đ/s: } x - y + 2 = 0 \text{ hoặc } x - y + 22 = 0 \text{ hoặc } x - 5y + 10 = 0 \text{ hoặc } 7x + 13y + 182 = 0$$

Bài 17. Cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 13$; $(C_2): (x-6)^2 + y^2 = 25$ cắt nhau tại $A(2; 3)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A cắt (C_1) và (C_2) theo hai dây cung bằng nhau.

$$\text{Đ/s: } 41x + 3y - 91 = 0, x - 3y + 7 = 0$$

Bài 18. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $C(-1; -3)$, đường trung trực của cạnh BC là: $3x + 2y - 4 = 0$ và trọng tâm $G(4; -2)$

Bài 19. Cho đường thẳng $(d): x + 2y - 3 = 0$ và điểm $A(-1; -3)$. Tìm hai điểm B, C trên đường thẳng d sao cho tam giác ABC là tam giác ABC cân ở A và độ dài $BC = 2\sqrt{5}$.

$$\text{Đ/s: } B(-1; 2), C(3; 0)$$

15. MỘT SỐ BÀI TỌA ĐỘ PHẪNG HAY VÀ KHÓ – P2

Thầy Đặng Việt Hùng

Bài 1: Cho tam giác ABC biết đường cao và trung tuyến xuất phát từ A lần lượt là $6x - 5y - 7 = 0$ và $x - 4y + 2 = 0$. Tính diện tích tam giác ABC biết trọng tâm tam giác thuộc trục hoành và đường cao từ đỉnh B đi qua $E(1; -4)$

Bài 2: Cho tam giác ABC có $M(1; -2)$ là trung điểm AB , trục Ox là phân giác góc A , đỉnh B, C thuộc đường thẳng đi qua $N(-3; 0)$ và $P(0; 2)$. Tìm A, B, C và diện tích tam giác.

Bài 3: Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng $d_1: 2x + y - 4 = 0$ qua điểm $M(1; -1)$ cắt đường thẳng (d_2) tại A, B sao cho $AB = 2\sqrt{7}$.

D/s: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9; (x-13)^2 + (y+22)^2 = 585$

Bài 4: Viết phương trình đường thẳng d qua $M(1; -1)$ cắt đường tròn tâm $I(4; 0)$ bán kính $R = 5$ tại A, B sao cho $MA = 3MB$.

D/s: $x + 2y + 1 = 0$ hoặc $2x - y - 3 = 0$.

Bài 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông cân tại A ngoại tiếp $(C): x^2 + y^2 = 2$. Tìm tọa độ 3 đỉnh của tam giác biết điểm A thuộc tia Ox .

D/s: $A(2; 0); B(\sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}); C(-\sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$

Bài 6: Cho hai đường tròn $\begin{cases} (C_1): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \\ (C_2): x^2 + y^2 - 10x - 6y + 30 = 0 \end{cases}$ có tâm là I và J . Gọi H là tiếp điểm của (C_1) và

(C_2) . Gọi d là tiếp tuyến chung ngoài không qua H của (C_1) và (C_2) . Tìm giao điểm K của d và IJ . Viết phương trình đường tròn qua K tiếp xúc với (C_1) và (C_2) tại H .

D/s: $K(11; 11); \left(x - \frac{37}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{31}{5}\right)^2 = 36$.

Bài 7: Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(1; 3)$ nằm ngoài $(C): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d qua A cắt (C) tại hai điểm B và C sao cho $AB = BC$.

Bài 8: Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đường cao $AH: x - 3\sqrt{3} = 0$, phương trình hai đường phân giác trong góc B và góc C lần lượt là $x - \sqrt{3}y = 0$ và $x + \sqrt{3}y - 6 = 0$, biết bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng 3. Viết phương trình các cạnh tam giác biết đỉnh A có tung độ dương.

D/s: $(AB): y = \sqrt{3}x; (AC): y = -\sqrt{3}x + 18$

Bài 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (T) có phương trình: $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ và $I(8; 5)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho qua M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (T) đồng thời đường thẳng AB đi qua I (A, B là hai tiếp điểm).

D/s: $M(0; 4)$

Bài 10: Cho 3 đường thẳng $\begin{cases} d_1 : x + y + 3 = 0 \\ d_2 : x - y + 4 = 0 \\ d_3 : x - 2y = 0 \end{cases}$. Viết phương trình đường tròn có tâm I là giao điểm của d_1 và d_2 đồng thời cắt d_3 tại AB sao cho $AB = 2$.

Đ/s: $\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{101}{20}$.

Bài 11: Cho các đường tròn $\begin{cases} (C_1) : (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{2} \\ (C_2) : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng (d) tiếp xúc với

đường tròn (C_1) cắt đường tròn (C_2) theo dây cung có độ dài bằng $2\sqrt{2}$.

Bài 12: Trong mặt phẳng Oxy cho ba đường thẳng $d_1 : x - 3y = 0; d_2 : 2x + y - 5 = 0; d_3 : x - y = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết rằng $A \in d_1; C \in d_2; B, D \in d_3$.

Bài 13: Cho ΔABC có $B(1; 2)$, phân giác trong góc A có phương trình $d : 2x + y - 1 = 0$; khoảng cách từ C đến d bằng 2 lần khoảng cách từ B đến d . Tìm A, C biết C thuộc trục tung.

Bài 14: Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng $\begin{cases} d : x + 2y - 1 = 0 \\ d' : 3x + y + 7 = 0 \end{cases}$ cắt nhau tại điểm I và điểm $M(1; 2)$.

Viết phương trình đường Δ qua M cắt d, d' lần lượt tại A, B sao cho $AI = \sqrt{2}AB$.

Bài 15: Trong mặt phẳng cho điểm $A(7; 1)$ và hai đường thẳng $\begin{cases} d_1 : 2x + y + 7 = 0 \\ d' : 4x + 3y - 27 = 0 \end{cases}$. Lập phương trình

đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết B thuộc d_1, C thuộc d_2 và nhận $G\left(\frac{7}{3}; \frac{5}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác.

Bài 16: Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), G\left(0; \frac{2}{3}\right)$ lần lượt là trung điểm của cạnh BC và trọng tâm tam giác ABC . Viết phương trình các cạnh của tam giác.

Bài 17: Trong mặt phẳng cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ và điểm $A(-1; 3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (C) và có diện tích bằng 10.

Bài 18: Cho hai đường tròn $(C_1) : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 14 = 0, (C_2) : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C_1) tại A, B cắt (C_2) tại C, D sao cho $AB = 2\sqrt{7}; CD = 8$

Đ/s: $2x + y + 3\sqrt{5} - 3 = 0; 2x + y - 3\sqrt{5} - 3 = 0$

$$Đ/s: H(\sqrt{3}; -1), B(-\sqrt{3}; 1).$$

Bài 15. Cho tam giác ABC có $A(-4; 1), B(2; 4), C(2; -2)$. Tìm trục tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác ABC .

$$Đ/s: H\left(\frac{1}{2}; 1\right); O\left(-\frac{1}{4}; 1\right).$$

II. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1) Phương trình có các yếu tố vuông góc, song song

Bài 1. Lập phương trình đường thẳng d biết

a) d đi qua $C(-2; 5)$ và song song với đường thẳng $d': 4x - 5y + 10 = 0$.

b) d đi qua điểm $D(-5; 3)$ và vuông góc với đường thẳng $d': \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 4 + 9t \end{cases}$.

c) d đi qua điểm $M(2; 5)$ và song song với đường thẳng $d': \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 4 + 5t \end{cases}$.

d) d đi qua $N(3; 4)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: 4x - 7y + 3 = 0$.

Bài 2. Cho tam giác ABC có $A(-2; 1), B(2; 3)$ và $C(1; -5)$.

a) Lập phương trình đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác.

b) Lập phương trình đường thẳng chứa đường cao AH của tam giác.

c) Lập phương trình đường thẳng chứa đường trung tuyến AM .

d) Lập phương trình đường thẳng chứa đường trung trực của cạnh BC .

Bài 3. Cho tam giác ABC biết $A(1; 4), B(3; -1)$ và $C(6; -2)$.

a) Lập phương trình đường thẳng chứa các cạnh của tam giác.

b) Lập phương trình đường cao AH và trung tuyến AM .

Bài 4. Cho tam giác ABC có $A(-4; 5), B(6; -1), C(-1; 1)$.

a) Viết phương trình các đường cao của tam giác đó.

b) Viết phương trình các đường trung tuyến của tam giác đó.

c) viết phương trình đường trung trực cạnh BC .

Bài 5. Biết hai cạnh của một hình bình hành có phương trình $x + 3y = 0$ và $2x - 5y + 6 = 0$, một đỉnh của hình bình hành là $C(4; 1)$. Viết phương trình các cạnh còn lại của hình bình hành.

Bài 6. Cho hình vuông $ABCD$ có tọa độ điểm $A(2; 1)$; tâm $I(1; 3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông và viết phương trình các cạnh.

Bài 7. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có phương trình một cạnh là $x + y + 2 = 0$; tâm $I(1; 1)$ và diện tích của hình chữ nhật bằng 12. Viết phương trình các cạnh của hình chữ nhật.

2) Phương trình có các yếu tố tạo góc và khoảng cách

• Lập phương trình đường thẳng có yếu tố tạo góc:

Bài 1. Lập phương trình đường thẳng d biết

a) d đi qua $A(2; -3)$ và tạo với $\Delta: x - 2y + 3 = 0$ góc φ với $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Đ/s: $d: x + y + 1 = 0$

b) d đi qua $A(1; -3)$ và tạo với $\Delta: x + 3y + 2 = 0$ góc 45°

Đ/s: $d: 2x + y + 1 = 0$

c) d đi qua $M(-3; -1)$ và tạo với trục Ox góc 45°

Đ/s: $d: x + y + 4 = 0$

Bài 2. Lập phương trình đường thẳng d biết d đi qua $A(-1; -1)$ và tạo với $\Delta: 2x - 3y + 1 = 0$ góc φ với $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{26}}$.

Đ/s: $d: x + y + 2 = 0$

Bài 3. Lập phương trình đường thẳng d biết

a) d đi qua $M(1; -1)$ và tạo với $\Delta: x - y + 1 = 0$ góc φ với $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Đ/s: $d: 2x + y - 1 = 0$

b) d đi qua $A(3; -2)$ và tạo với $\Delta: 2x + y - 3 = 0$ góc φ với $\cos \varphi = \frac{4}{5}$.

Đ/s: $d: x + 2y + 1 = 0$

c) d đi qua $A(2; 0)$ và tạo với Ox góc φ với $\cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Đ/s: $d: x + 3y - 2 = 0$

• Lập phương trình đường thẳng có yếu tố khoảng cách:

Bài 1. Lập phương trình đường thẳng d biết

a) d đi qua $M(2; -3)$ và khoảng cách từ $A(1; 1)$ đến d bằng $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Đ/s: $d: x + y + 1 = 0$

b) d đi qua $M(4; 2)$ và khoảng cách từ $A(1; 0)$ đến d bằng $\frac{3}{\sqrt{10}}$.

Đ/s: $d: x - 3y + 2 = 0$

c) d đi qua $M(1; \sqrt{3})$ và khoảng cách từ $A(1; 0)$ đến d bằng $\frac{3}{2}$.

Đ/s: $d: x - \sqrt{3}y + 2 = 0$

Bài 2. Lập phương trình đường thẳng d biết

a) d đi qua $O(0; 0)$ và cách đều hai điểm $A(2; 2)$, $B(4; 0)$

Đ/s: $x + y = 0$ và $x - 3y = 0$

b) d đi qua $OM(4; 2)$ và cách đều hai điểm $A(3; 0)$, $B(-5; 4)$

Đ/s: $x + 2y - 14 = 0$ và $y - 2 = 0$

Bài 3. Lập phương trình đường thẳng d biết

a) d đi qua $A(1; 1)$ và cách $B(3; 6)$ một khoảng bằng 2.

Đ/s: $x - 1 = 0$ và $21x - 20y - 1 = 0$

b) cách $A(1; 1)$ một khoảng bằng 2 và cách $B(2; 3)$ một khoảng bằng 4.

Đ/s: $y + 1 = 0$ và $4x + 3y + 3 = 0$

3) Phương trình có dạng đoạn chắn

Bài 1. Lập phương trình đường thẳng d đi qua $M(1; 2)$ và cắt Ox, Oy tại A, B sao cho

a) $OA = 2OB$.

b) $\frac{1}{OA^2} + \frac{4}{OB^2} = 1$.

c) $S_{OAB} = \frac{9}{2}$.

Đ/s: b) $a = b = 1$ c) $a = b = 3$

Bài 2. Lập phương trình đường thẳng d đi qua $M(2; -3)$ và cắt Ox, Oy tại A, B sao cho

a) $OA = \frac{2}{3}OB$.

b) $4OA^2 + OB^2 = 100$.

c) S_{OAB} đạt giá trị nhỏ nhất.

d) $\frac{3}{OA^2} + \frac{2}{OB^2} = \frac{275}{36}$.

Đ/s: a) $a = b = 2$ b) $a = 4; b = 6$ c) $x + y - 5 = 0$ d) $a = \frac{2}{3}; b = \frac{3}{2}$.

Bài 3. Lập phương trình đường thẳng d vuông góc với đường $\Delta: 2x - y + 1 = 0$ và cắt Ox, Oy tại A, B sao cho

a) $AB = 1$

b) $S_{OAB} = 4$.

c) $\frac{2}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = 1$

Đ/s: a) $a = 2; b = 1$ b) $a = 4; b = 2$ c) $a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{4}$.

Bài 4. Lập phương trình đường thẳng d đi qua $M(2; 1)$ và cắt Ox, Oy tại A, B sao cho

a) $OA = 2OB$.

b) $\frac{1}{OA^2} + \frac{3}{OB^2} = \frac{13}{16}$

c) $d(O; d) = \frac{6}{\sqrt{17}}$.

Đ/s: b) $a = 4; b = 2$